Le mouvement en Géométrie classique

Roshdi Rashed

(CNRS, Paris)

Abstract :

In this article, we sought to present an overall picture to the beginnings of the study of geometrical transformations and of the introduction of the concept of motion as a primitive notion in geometry, by the polymath Ibn al-Haytham (dead after 1040).

ملخص:

يبحث هذا المقال في تاريخ التحويلات الهندسية وما ألزمته من تصور مفهوم الحركة كمفهوم أولي في الهندسة، ومن ثم كيف انتقلت الهندسة من دراسة الأشكال إلى دراسة التحويلات. بدأ كل هذا في القرن التاسع الميلادي ونضج على أيدي الحسن بن الهيثم فيما بعد.

Résumé :

A partir du IXe siècle les mathématiciens s'intéressent de plus en plus aux transformations géométriques. Il a alors fallu introduire le mouvement comme notion primitive de la géométrie. Cet acte fondateur, qui revient à Ibn al-Haytham (mort après 1040), a été à la base de la conception de l'*ars analytica*. Dans cet article, on retrace les grandes lignes de cette histoire.

Dans son *Commentaire sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide*, al-Khayyām écrit :

> J'avais bien vu un ouvrage d'Abū 'Alī ibn al-Haytham (Que Dieu le Très-Haut lui accorde Sa miséricorde) intitulé *La Résolution des difficultés du premier Livre*, et je n'ai pas douté qu'il s'était appliqué à cette prémisse et qu'il l'avait démontrée. Mais lorsque je l'examinais en m'en réjouissant, je me rendis compte que l'auteur avait voulu que ce postulat fût au début du Livre parmi l'ensemble des autres principes sans qu'il eût besoin de démonstration ; qu'il avait fait des efforts démesurés pour y parvenir ; qu'il avait changé les définitions des parallèles ; et qu'il avait fait des choses très étonnantes, toutes extérieures à cet art même.
>
> Il a dit notamment : *Si une ligne droite se meut perpendiculairement à une autre ligne, et qu'elle reste lors de son mouvement constamment perpendiculaire à cette ligne, son autre extrémité engendrera une ligne droite ; et la ligne générée sera parallèle à la ligne immobile.* Il prend ensuite ces deux lignes, les incurve, les met en mouvement, et fait avec elles un certain nombre d'expériences toutes extrinsèques, jusqu'à ce que cette prémisse puisse – après avoir surmonté ces difficultés et ces choses extravagantes – être admissible pour lui au début.
>
> Mais ce sont là des propos qui, pour plusieurs raisons, n'ont absolument aucun rapport avec la géométrie : Comment peut-on déplacer la ligne de telle sorte qu'elle soit constamment perpendiculaire aux deux lignes ? et comment démontrer que ceci est

possible ? Quel rapport y a-t-il entre la géométrie et le mouvement ? et que signifie le mouvement ? D'autre part, il est évident, aux yeux des chercheurs, que la ligne est un accident qui ne peut exister que dans une surface, cette surface dans un solide ; ou qui peut elle-même exister dans un solide sans faire précéder une surface. Comment donc pourrait-elle se mouvoir en faisant abstraction de son objet ? Comment la ligne pourrait-elle résulter du mouvement du point, alors qu'elle est antérieure au point et selon l'essence, et selon l'existence ?

Mais l'on pourrait objecter : Euclide avait bien défini la sphère, au début du onzième Livre, par quelque chose de ce genre. Voici son énoncé : *La sphère est engendrée par la rotation d'un demi-cercle jusqu'à ce qu'il revienne à son point de départ*.

Nous répondrons donc et nous dirons : La définition véritable et évidente de la sphère est connue ; à savoir, *que c'est une figure solide qui est comprise par une unique surface, à l'intérieur de laquelle se trouve un point tel, que toutes les lignes droites menées de lui à la surface qui la comprend sont égales*. Mais Euclide s'est écarté de cette définition pour dire ce qu'il a dit par manque de discernement et par facilité, car, dans ces Livres où il mentionne les solides, il s'est vraiment laissé aller, comptant que l'étudiant s'est exercé avant d'y arriver. Et si cette définition avait eu un sens, on aurait défini le cercle en disant, *que le cercle est une figure plane engendrée par la rotation d'une ligne droite dans un plan, de telle sorte qu'une de ses extrémités reste fixe, et que l'autre revienne au point de départ du mouvement*. Mais dès lors que l'on s'est écarté de ce genre de définition en raison de l'existence du mouvement, et que l'on a pris en compte ce qui ne pouvait être inclus dans l'art en tant que principe, nous nous devons de suivre les traces des Anciens, et d'être en accord avec les principes démonstratifs et les règles universelles mentionnées dans les livres de logique. [1]

Ce texte d'al-Khayyām, que j'ai tenu à citer intégralement, soulève une question, qui, à ma connaissance, n'a jamais été posée auparavant : l'introduction du mouvement en géométrie est-elle légitime ? La réponse d'al-Khayyām, logicien pour ainsi dire, est négative, puisque la notion n'est pas définie, et que, de plus, elle n'est pas de celles qui appartiennent à la construction « axiomatique » euclidienne. Mais, plus importante que la réponse d'al-Khayyām est la question elle-même. Celle-ci a été suscitée par des changements qui se sont produits à partir du IX^e siècle en géométrie : le recours au mouvement avait envahi la recherche géométrique avec les Banū Mūsā, leur élève Thābit ibn Qurra, al-Farghānī, entre beaucoup d'autres. Thābit ibn Qurra, par exemple, a eu recours au mouvement aussi bien dans ses écrits en géométrie infinitésimale — *Sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale* — que dans sa tentative de démontrer le cinquième postulat[2]. Quant à al-Farghānī, c'est pour étudier la projection de la sphère. Au cours du siècle suivant, le recours au mouvement s'accroît au fur et à mesure que la géométrie cesse d'être une géométrie des figures pour devenir de plus en plus une géométrie des transformations des figures. Que l'on pense à Ibn Sinān, à al-Qūhī, à al-Sijzī, parmi bien d'autres.

[1] *Risāla fī sharḥ mā ashkala min muṣādarāt Kitāb Uqlīdis*, dans R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, Librairie Blanchard, 1999, p. 310-312 ; ar. p. 311, 6-313, 9.
[2] Voir R. Rashed et Ch. Houzel, « Thābit ibn Qurra et la théorie des parallèles », *Arabic Sciences and Philosophy*, 15.1, 2005, p. 9-55.

On peut donc dire qu'al-Khayyām réagit en logicien contre une pratique devenue de plus en plus courante. Il reconnaît en outre que l'intervention du mouvement lors de l'étude des solides dans les *Éléments* d'Euclide relève simplement de la contrebande, pour cette même raison déjà évoquée que la notion de mouvement n'est pas une notion primitive de la géométrie. En effet, on la cherchera en vain parmi les définitions du livre I des *Éléments*. Quant à la notion de « superposition » utilisée par Euclide pour définir l'égalité de deux figures ou, en d'autres termes, ce que sont des figures superposables, elle n'a rien de commun avec celle d'une transformation isométrique, mais d'une vision intellectuelle qui pose une figure géométrique sur l'autre et reconnaît une *identité*, au besoin en explicitant ses postulats de congruence. C'est dire que « la superposition » est un acte de « l'intelligence pure » pour utiliser les mots de Proclus.

Personne avant Ibn al-Haytham ne s'est attaqué à ce manque. C'est lui qui, dans son livre *Sur les connus*, qui s'est efforcé de faire du mouvement une notion primitive de la géométrie, et ainsi fournir une base théorique à une pratique qui a envahi de plus en plus la recherche géométrique depuis déjà deux siècles — comme on le verra plus loin. C'est pourquoi la critique qu'al-Khayyām fait de son prédécesseur porte à faux.

Rappelons pour commencer les voies empruntées par les mathématiciens pour introduire le mouvement dans les mathématiques anciennes et classiques, avant d'esquisser l'histoire de cette introduction. Le mouvement intervient en effet à plusieurs titres :

1° Dans la génération de l'objet géométrique lui-même.

2° Dans les transformations des objets, lorsque la géométrie cesse d'être strictement une géométrie des figures.

3° Dans l'étude des comportements asymptotiques ; c'est-à-dire là où intervient en quelque sorte ce que plus tard on appellera « passage à la limite ».

4° Dans l'étude des variations des grandeurs, des rapports, etc.

Ces domaines ne sont pas indépendants. Le comportement asymptotique, par exemple, est par essence variable ; et, d'autre part, la variation d'une grandeur ou d'un rapport subit des variations infiniment petites. De plus, il faut distinguer pour chacune des précédentes voies entre un recours spontané au mouvement dans la pratique de la géométrie et la tentative délibérée de l'introduire. C'est précisément cette nouvelle intention qui a échappé à al-Khayyām et qui caractérise la recherche géométrique à partir du IX^e siècle.

I. Venons-en à présent à l'esquisse historique pour établir cette dernière affirmation.

On peut affirmer sans se tromper que la question de l'introduction du mouvement en géométrie ne pouvait se poser avant le troisième siècle avant notre ère. Pour la génération de leurs objets, les mathématiciens optaient en effet, sans aucune interrogation théorique, pour une démarche cinématique. C'est précisément ainsi que procèdent Archytas, Eudoxe, Hippias, Dinostrate, Menechme. Pour ne rappeler qu'un seul exemple, celui de la quadratrice, elle est engendrée grâce à deux mouvements distincts, l'un circulaire (une rotation), l'autre rectiligne (un déplacement). Mais ni Hippias, ni Dinostrate, ne s'est demandé s'il est légitime de procéder par ces mouvements.

Il en est de même pour la spirale, l'hélice conique, l'hélice cylindrique, l'hélice sphérique, l'hippopède d'Eudoxe, la conchoïde, le cône, le cylindre ; on fait intervenir un mouvement uniforme, rectiligne et circulaire, sans aucune justification théorique. Appelons *pragmatique* ce recours au mouvement pour engendrer les objets géométriques. Or, dans la géométrie grecque, pour engendrer une courbe ou, plus précisément, pour affirmer son existence, on n'avait que deux moyens : soit par ce procédé pragmatique, soit par section d'un solide. Mais les solides, dans leur quasi-majorité, étaient obtenus par mouvement. Ainsi, dans les *Éléments*, tous les solides, à l'exception des polyèdres, sont obtenus cinématiquement. Tout se ramène donc, en dernière analyse, à du mouvement, ce qui n'est justifié nulle part. L'attitude statique pour ainsi dire ne concerne que les livres plans des *Éléments*. Donc font exception, du moins chez Euclide, la droite, le cercle et les polyèdres. Il reste que plus tard Héron donnera une définition cinématique du cercle.

Autrement dit, l'intervention pragmatique du mouvement dans la génération des objets géométriques, ou tout simplement la conception cinématique, était dominante au IVe siècle avant notre ère ; et il a fallu attendre un siècle pour voir surgir la conception pour ainsi dire statique, intimement liée à l'exposé synthétique d'Euclide ou d'allure « axiomatique ». Même là Euclide s'est trouvé forcé d'opter pour une conception pragmatique, à partir du livre XI des *Éléments*. Après lui, c'est toujours la conception pragmatique qui domine : il suffit de rappeler *La Spirale* d'Archimède et les *Coniques* d'Apollonius. Plus généralement donc, il semble établi que pour les géomètres grecs la courbe nécessite un, ou des, mouvement(s), que leur mathématique ne leur permet pas de lier entre eux autrement que par l'intermédiaire de l'uniformité. La courbe est décrite par des mouvements uniformes ; si elle se ferme, elle forme une figure. On ne peut passer de l'intérieur à l'extérieur de la figure sans couper la courbe. De même, une courbe déjà donnée balaiera par un mouvement uniforme une surface, laquelle pourra envelopper un corps.

Rappelons à ce propos les deux premières définitions du premier livre des *Coniques* d'Apollonius :

1° « Si une droite joint un point à la circonférence d'un cercle n'appartenant pas au même plan que le point, qu'elle est prolongée de part et d'autre et que, le point restant fixe, elle tourne autour de la circonférence du cercle pour revenir à l'origine de son mouvement, j'appelle *surface conique* la surface décrite par la droite et qui est composée de deux surfaces opposées par le sommet, dont chacune s'accroît indéfiniment lorsque la droite qui décrit la surface est prolongée indéfiniment ; j'appelle *sommet* de la surface le point immobile, et *axe* la droite menée par le point et le centre du cercle ».

2° « J'appelle *cône* la figure comprise par le cercle et la surface conique comprise entre le sommet et la circonférence du cercle … »[1].

C'est finalement l'intervention pragmatique du mouvement qui permet de définir la surface et le corps en tant que *figures* géométriques. Par « figure » on entend, comme dans le *Ménon* 75a-76a, « la limite d'un solide » ; ou, comme dans Euclide, I, déf. 14, « ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites»[2].

Les coniques sont donc obtenues par mouvement et section plane. En somme, la conception pragmatique et ses outils mathématiques transcendent les paradoxes de Zénon et ne s'y arrêtent nullement.

Il y a cependant un autre genre d'objets qu'étudient les mathématiciens grecs : les lieux en surfaces. Écoutons Pappus :

> Reste enfin le troisième genre de problèmes qu'on appelle grammiques, parce qu'on emploie pour leur construction d'autres lignes que celles dont nous venons de parler, lesquelles ont une génération plus variée et plus forcée, dérivant de surfaces moins régulières et de mouvements plus compliqués. Telles sont les lignes que l'on rencontre dans ce qu'on appelle les *lieux en surfaces* et d'autres encore plus diversifiées trouvées en grand nombre par Démétrios d'Alexandrie dans ses *Considérations sur les lignes* et par Philon de Tyane au moyen de l'entrelacement des surfaces plectoïdes et autres de toute sorte ; lignes qui présentent nombre de propriétés admirables. Quelques-unes de ces lignes ont été trouvées dignes d'une étude plus développée, et l'une d'entre elles a même été dénommée « ligne paradoxale » par Menelaüs. D'autres lignes, telles que les spirales, les quadratrices, les cochloïdes et les cissoïdes sont toutefois de la même famille.[3]

Si les lieux en surface dont parle ici Pappus sont ceux d'Euclide, et si ces surfaces sont des cônes et des cylindres à base circulaire, ainsi, peut-être, que des sphères, on peut avoir comme courbes des cubiques gauches et des biquadratiques. L'hippopède d'Eudoxe est un exemple. En tous les cas, les surfaces sont effectivement créées par le mouvement des lignes, les lignes le sont soit par mouvement de points, soit par section de surfaces. Rappelons pour finir le passage du *De anima*, qui reflète cette position pragmatique : « De plus, puisque les partisans de cette théorie disent que la ligne en mouvement engendre la surface, et le point la ligne […] »[4].

Pour conclure sur ce point, on peut dire que l'intervention en géométrie du mouvement uniforme rectiligne et circulaire, c'est-à-dire la conception pragmatique, était commune aux mathématiciens grecs. Cette intervention n'a jamais reçu la moindre justification. Seuls les livres de géométrie plane des *Éléments* font exception à cette position commune.

Cette conception pragmatique et le divorce entre l'exposé « axiomatique » et la pratique mathématique durera quatorze siècles encore, jusqu'à Ibn al-Haytham.

---

[1] *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Nouveau tirage Paris, 1959. Cf. également *Apollonius* : *Les Coniques, Livres I-VII*, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe par R. Rashed, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 2008-2009.

[2] *Les Œuvres d'Euclide*, traduites littéralement par F. Peyrard, Paris, 1819; Nouveau tirage, augmenté d'une importante Introduction par M. Jean Itard, Paris, Librairie A. Blanchard, 1966.

[3] *La Collection mathématique*, Œuvre traduite pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, 2 vol., Paris / Bruges, 1933; Nouveau tirage Paris, 1982, vol. I, p. 207-208.

[4] Aristote, *De l'âme*, trad. J. Tricot, Paris, J. Vrin, 1959, I, 4, 409 a 4.

II-. Je ne reprendrai pas ici en gros ce que j'ai décrit en détail dans les volumes sur *Les Mathématiques infinitésimales entre le IX^e^ et le XI^e^ siècle*, c'est-à-dire les développements de la géométrie et la fondation des nouveaux chapitres : géométrie infinitésimale, géométrie des projections, géométrie algébrique, géométrie sphérique, etc. Le trait distinctif de cette géométrie, pour le dire en un mot, est sans aucun doute l'étude des transformations géométriques et des projections. On assiste à cette époque à l'introduction du mouvement dans les différents sens que j'ai indiqués au début : génération des objets, transformations géométriques, comportements asymptotiques et variations des grandeurs et des rapports. Une nouvelle exigence s'impose aux géomètres : justifier l'intervention du mouvement en géométrie. La conception pragmatique ne suffisait plus, il a fallu une véritable élaboration théorique qui fonde une telle justification. C'est précisément la tâche qu'Ibn al-Haytham a entreprise en rédigeant un traité intitulé « Sur les connus » et en élaborant une *ars analytica*. Commençons par son traité sur les connus.

Dans une introduction substantielle à son traité, Ibn al-Haytham s'efforce de déterminer cette notion de « connu ». Le mot n'est pas nouveau, et appartient au lexique de l'Euclide arabe. C'est en effet par ce terme qu'on a traduit le grec δεδομένα ; et ce vocable a été ensuite constamment employé par les mathématiciens. Ibn al-Haytham se réfère donc successivement au « connu en nombre », au « connu en rapport », au « connu en position », au « connu en forme » et au « connu en grandeur ». S'arrêter au sens euclidien, explicite dans les *Données*, c'est ne rien comprendre à la distance parcourue par Ibn al-Haytham et par ses prédécesseurs. Pour ne donner qu'un exemple, considérons le « connu en position ». Euclide n'entend par là rien d'autre qu'une seule position, que l'on peut déterminer absolument. Ainsi, un segment de position connue, c'est un segment qui est toujours dans la même position, que nous pouvons déterminer. Ibn al-Haytham définit en revanche la position par le terme *naṣba* (θέσυιυς « situation »), qu'il s'agisse d'un rapport à une chose fixe ou à une chose mobile. En bref, Ibn al-Haytham introduit explicitement le mouvement pour parler de la position, ce qu'Euclide ne pouvait admettre. On verra plus loin ce que signifie l'intervention du mouvement.

C'est en philosophe pour ainsi dire qu'Ibn al-Haytham s'efforce de déterminer le sens du mot « connu ». Il commence par se ramener à ce qui caractérise la connaissance apodictique, c'est-à-dire son invariabilité aussi bien ontologique que noésologique. Ne sont objets d'une telle connaissance, d'après Ibn al-Haytham, que des notions invariables auxquelles le sujet connaissant accorde une crédibilité elle-même invariable, sachant de surcroît qu'il en est ainsi. Mais pour notre mathématicien, cette invariabilité des notions, des idées des phénomènes, commande les deux autres : l'invariabilité de la crédibilité, et la connaissance qu'en a le sujet. Autrement dit, l'invariabilité des notions précède ontologiquement et logiquement l'invariabilité de la crédibilité, et la connaissance que le sujet a de cette dernière. C'est d'ailleurs cela qui conduit Ibn al-Haytham à un réalisme mathématique, lorsqu'il soutient que « le connu est à vrai dire toute notion qui n'admet pas le changement, qu'elle soit ou non crue par quelqu'un qui croit »[1].

[1] Voir *Les Connus*, dans R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle,* vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, London, al-Furqān, 2000, p. 446.

Ibn al-Haytham déploie ensuite quelques conditions remplies par cette connaissance apodictique : sa nécessité — elle n'est relative ni à un lieu ni à un temps ; la nature de la crédibilité que le sujet lui accorde — il s'agit d'une crédibilité consciente. Il ne suffit donc pas de savoir qu'une notion est invariable pour savoir que nous le savons, mais il faut que cette crédibilité soit invariable, et que nous sachions qu'elle est ainsi. Cette conscience de l'invariabilité de la crédibilité s'acquiert soit par une évidence nécessaire — comme pour les axiomes ; soit au terme d'un syllogisme démonstratif, lorsqu'il s'agit d'une proposition mathématique. « Le connu » appartient à cette dernière espèce, et à elle seulement : sur le plan ontologique, c'est la notion invariable, indépendamment de tout sujet connaissant ; sur le plan de la connaissance, elle se distingue par une crédibilité invariable, qui est soit l'effet d'une évidence nécessaire, soit la conclusion d'une démonstration.

À cette doctrine aux couleurs platoniciennes, Ibn al-Haytham ajoute une distinction qui, elle, est d'allure aristotélicienne : celle du connu en acte et du connu en puissance. Entre ces deux « connus », il n'y a cependant aucune différence ontologique, mais simplement noésologique : le connu en puissance est un connu aussi réel que le connu en acte, il est simplement en attente d'un sujet connaissant.

Un historien qui ne s'arrête qu'aux seuls résultats mathématiques ne peut qu'être déconcerté par cette digression philosophique, présentée par l'auteur comme une partie intégrante de son exposé mathématique. Pourquoi Ibn al-Haytham a-t-il ressenti ce besoin d'élaborer cette doctrine philosophique pour traiter des « connus »? De quoi s'agit-il exactement? Le problème d'Ibn al-Haytham, hérité de ses prédécesseurs à partir de la seconde moitié du IX^e siècle, mûri et enrichi par lui, est de justifier la permanence ou le changement des propriétés d'une entité géométrique ayant subi une transformation ou un mouvement. Que deviennent son extension, sa position, sa forme et sa grandeur? Tant qu'il s'agissait d'une géométrie d'où les notions de mouvement et de transformation sont absentes, cette question ne présentait aucun caractère d'urgence. Mais la situation est tout autre dès que l'on procède délibérément par mouvement et par transformations géométriques, comme le firent les prédécesseurs d'Ibn al-Haytham, et surtout l'auteur lui-même. Ibn al-Haytham en est bien conscient lorsqu'il décrit dans son traité sur *L'Analyse et la Synthèse*, à propos des connus, ce qui le sépare d'Euclide :

> […] tous les connus, mentionnés par Euclide dans son livre sur *Les Données*, sont compris dans l'ensemble des parties que nous avons mentionnées ; et dans ce que nous avons mentionné, il y a quelque chose qu'Euclide n'a pas mentionné : *ce sont les choses mobiles de position connue*[1].

En d'autres termes, si les connus d'Euclide désignent la position, la forme, la grandeur, comme propriétés inhérentes aux figures, dans une géométrie qui ne s'occupe que des figures, *Les Connus* d'Ibn al-Haytham désignent les mêmes propriétés, mais pour des figures et des lieux qui se meuvent d'un mouvement continu, ou auxquelles on fait subir des transformations. Cette différence en engage bien d'autres, et non des moindres : la conception de l'objet géométrique et celle de l'espace. Avec Euclide, la recherche géométrique porte sur les propriétés des seules figures ; avec Ibn al-Haytham et ses

[1] Souligné par nous, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle,* vol. III, p. 256.

proches prédécesseurs, on commence à s'intéresser aux rapports entre figures dans l'espace — c'est d'ailleurs pour cette raison que notre mathématicien s'est senti obligé d'écrire son traité sur *Le Lieu*[1], où l'on reconnaît la première mathématisation du lieu. Toute la difficulté est alors de justifier ce nouveau concept de « connu », de pouvoir parler des propriétés invariantes d'une figure, d'un lieu, d'un objet géométrique, en mouvement ou affecté d'une transformation. Ni Ibn al-Haytham, ni, pendant huit siècles encore, ses successeurs, n'étaient en mesure de fournir une réponse mathématique à cette question mathématique. Il n'est pas rare que, dans des situations analogues, le mathématicien avance une réponse philosophique. En possession de ce concept de « connu », Ibn al-Haytham brosse un tableau des différents connus dans les sciences mathématiques. Mais, lors de sa rédaction du texte sur *Les Connus*, sa position se modifie quelque peu, et cette modification est riche d'enseignement sur le fond de sa pensée. Il n'est pas possible d'exposer ici ces modifications, mais d'en souligner la portée générale.

Tout d'abord, en effet, on ne peut qu'être sensible au souci pour ainsi dire totalisant et relationnel qui anime tout l'exposé d'Ibn al-Haytham : lorsqu'il traite l'un des éléments d'une figure, il ne le considère pas seulement comme une grandeur, mais aussi comme variété de la famille à laquelle il appartient. La connaissance de cet élément portera donc, et c'est là l'essentiel, sur sa grandeur, sa position, sa forme, aussi bien que sur les rapports qu'il entretient avec d'autres : en bref, sur les propriétés de l'espace. Le pas franchi est considérable, et Ibn al-Haytham consacre une grande partie de son introduction à l'élucidation de ces notions. Prenons, à titre d'exemple, la notion de position.

La position est définie par Ibn al-Haytham à l'aide de trois notions : mouvement, ordre et relation. Ainsi, la position d'un point — considéré comme l'extrémité d'une ligne — est connue lorsque sa distance (ou ses distances) à un autre point (ou à d'autres points) reste invariable. Plusieurs cas sont à considérer : le point P est fixe et les autres points le sont également ; le point P se meut d'un mouvement circulaire autour du point fixe, mais sans que la distance entre eux change ; le point P et les autres points sont tous animés d'un même mouvement, qui laisse invariées les distances entre P et chacun de ces points. Il fera de même pour la ligne, la surface, le solide.

De même, la position de la ligne est définie par rapport à des points fixes ; dans ce cas, la ligne ne se meut d'aucun mouvement, excepté l'augmentation et la diminution, et les distances entre ses points, et deux points, ou davantage, ne varient pas. Cette ligne sera dite *de position connue absolument*. La position de la ligne pourra également être repérée par rapport à un seul point fixe, et dans ce cas les notions connues seront les distances invariables entre tout point de la ligne et ce point fixe, que la ligne soit elle-même fixe ou mobile. On repère également la position de la ligne par rapport à une autre ligne, que cette dernière soit fixe ou mobile. On repère encore la position de la ligne par rapport à un point mobile ou à un ensemble de points mobiles, et les notions connues seront dans ce cas les distances invariables entre chaque point de la ligne et chacun des points mobiles ; la ligne doit alors être animée du même mouvement, et dans la même direction, que le mouvement des points considérés. On repère enfin la position de la ligne par

[1] Voir *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle,* vol. III, chapitre III.

rapport à une ligne fixe, et la notion connue dans ce cas est celle de l'angle formé par l'intersection de ces deux lignes ou de leurs prolongements, que la ligne dont on cherche à connaître la position soit fixe ou mobile, à condition toutefois que l'angle formé demeure invariable. Si la ligne, ou son prolongement, ne coupe pas la ligne par rapport à laquelle elle sera de position connue, elle le fera en tout cas si les deux lignes sont coupées par une droite qui formera avec chacune d'elle un angle connu.

Ibn al-Haytham poursuit encore son énumération et repère la position de la ligne par rapport à une ligne mobile, puis par rapport à une surface fixe, et enfin par rapport à une surface mobile. Il reprend une tâche analogue pour définir la position d'une surface et la position d'un solide, et pour examiner les autres notions : de forme connue, de grandeur connue, et de rapport connu.

On voit ensuite, à l'examen de cette longue introduction de son livre, qu'Ibn al-Haytham a intégré le mouvement au titre de notion primitive de la géométrie, notion nécessaire à la définition de la position et de la forme de toute grandeur géométrique, et comme garant de sa continuité. Le même examen montre aussi que cet héritier d'Archimède en même temps que d'Apollonius distingue explicitement les propriétés de position des propriétés métriques. Même si une propriété de position peut se présenter à l'aide de mesures de distances et d'angles, c'est-à-dire sous forme métrique, Ibn al-Haytham tient cependant à décrire ce qui est propre à la position en tant que telle. L'essentiel est à ce stade de repérer la position — disons d'un point — sans l'intervention d'aucun système de coordonnées, mais seulement par rapport à des points ou à des lignes, fixes ou mobiles ; il s'agit donc pour ainsi dire d'une géométrie descriptive au sens propre du terme. L'objectif que se propose Ibn al-Haytham dans *Les Connus* est clair : identifier les relations invariantes qui permettent de décrire la position, la forme, la grandeur, le rapport. Chaque groupe de relations constituera un chapitre d'une géométrie à venir, ou de cette science baptisée « Les Connus ».

Deux chapitres suivent cette introduction, qui littéralement foisonne d'intuitions puissantes et pénétrantes. Dans le premier, l'auteur s'intéresse principalement aux propriétés de position et de forme. Il traite certains ensembles de points et quelques transformations ponctuelles : homothétie, similitude, translation, ainsi que d'autres transformations birationnelles d'ordre 2. Mais alors que les premières transformations peuvent opérer sur tous les points du plan, les secondes – les transformations birationnelles quadratiques – mises en œuvre par Ibn al-Haytham opèrent seulement de courbe à courbe (cf. proposition 14 de la première partie par exemple). Cette différence est peut-être la raison pour laquelle Ibn al-Haytham n'a pas explicité le deuxième type de transformations pourtant présent dans son travail.

C'est à cette tâche de caractérisation que sont consacrées les premières propositions du chapitre, avant que soient examinées quelques propriétés telles que l'homothétique d'un cercle, le transformé d'un cercle par une translation, etc. Dans le second chapitre, Ibn al-Haytham cherche les moyens géométriques les plus simples pour déterminer les positions des points ainsi que les rapports entre eux, à partir des éléments connus. En un mot, tout au long de ces deux chapitres, Ibn al-Haytham étudie les lieux rectilignes et circulaires, ainsi que leurs transformés.

La recherche menée dans ces deux chapitres représente tout au plus une réalisation partielle du projet dessiné dans l'introduction, une ébauche de ce que promettait la nouvelle discipline. La moisson est cependant suffisamment riche pour indiquer l'orientation de cette recherche, et éclairer sa signification. Ne fournit-elle pas à l'analyste certaines propriétés invariables de position et de forme de quelques objets géométriques obtenus par mouvement, par transformation et par sections planes? Autant d'éléments nécessaires pour fonder l'art analytique.

Le but d'Ibn al-Haytham dans *Les Connus* est, en fait, double. Introduire le mouvement en géométrie et engager une recherche sur le mouvement et sur les transformations, en vue de découvrir ce qui reste invariable dans les objets ayant subi ces transformations. Mais ce traité *Sur les Connus* appartient à tout un groupe d'écrits d'Ibn al-Haytham, dont relèvent deux autres, respectivement intitulés *Les Propriétés des cercles* et *L'Analyse et la Synthèse*. Dans ce substantiel traité sur l'analyse et la synthèse, Ibn al-Haytham poursuit un second but : concevoir une nouvelle discipline du même nom, une *ars analytica*, qui trouvera sa méthode dans ce dernier livre. Deux idées centrales président à cette nouvelle méthode : il faut, d'une part, penser les objets géométriques non plus comme figures statiques, c'est-à-dire données une fois pour toutes, comme c'est le cas dans la géométrie euclidienne ; mais comme des figures engendrées par un, ou plusieurs, mouvements continus, et donc variables. Tout le problème est désormais d'identifier les éléments invariables au cours du mouvement et des transformations. D'autre part, et c'est la seconde idée, il faut admettre explicitement le mouvement non seulement dans les définitions, mais aussi comme procédé légitime de démonstration.

La nouvelle discipline géométrique — les Connus — impose au géomètre de nouvelles tâches. Comme il part de figures engendrées par l'un ou l'autre mouvement, il lui faut identifier celui-ci, et dans ce cas procéder par analyse — et c'est l'analyse qui lui permettra en outre de repérer les éléments invariants au cours de ce mouvement de génération de la figure ou de ses transformations. Mais, d'autre part, en partant des définitions des objets géométriques par le mouvement qui les engendre — une droite par rotation autour d'un axe, un cercle par la rotation d'une droite autour d'une extrémité fixe… —, on peut déduire d'une manière interne les conséquences qui s'ensuivent, et notamment les propriétés décrites dans les *Éléments*. Cette démarche est, à l'évidence, synthétique. C'est en ce sens que l'*ars analytica* conjugue deux voies. La synthèse n'est-elle pas alors également une voie de la découverte ? Aussi bien que l'analyse, la synthèse sert à sa manière la recherche des propriétés invariantes au cours du mouvement de génération de l'objet géométrique et de ses transformations, c'est-à-dire la recherche de cet être de raison.

La nécessité de cette nouvelle discipline, de cette *ars analytica*, dont *les Connus* constitue la matière et *L'Analyse et la Synthèse* la méthode, du coup s'éclaire : elle intervient pour rendre compte du mouvement et des transformations géométriques auxquels on recourait de plus en plus depuis le IX^e siècle ; elle vient répondre à la nouvelle exigence d'Ibn al-Haytham d'établir l'existence des objets géométriques. Par ses définitions génériques, l'*ars analytica* nous assure chaque fois de la cause entière de l'objet de pensée, et ainsi de son existence.

Cette discipline géométrique, *ars analytica* ou encore plus précisément *analysis situs*, qu'Ibn al-Haytham est le premier à avoir pensée, surgira à nouveau à partir de la seconde moitié du XVII^e siècle, sous d'autres noms et sous d'autres climats.