AL-MUKHATABAT ISSN 1737—6432 ISSUE 06/2013

Mathématiques et concrétudes phénoménologiques

Florian Forestier
(CEPCAP, Université Paris IV)

Abstract

The article is devoted to the contribution of Marc Richir' phenomenology to treat some issues of mathematical epistemology, in particular the issue of intuition. We don't take a position in the debate between formalism and intuitionism. Considering some mathematical developments in the twentieth century, we analyze the concept of mathematical intuition. The mathematical practice is a doing and a specific experiment of though. Philosophy should not seek to establish it : it should take note of this praxis and expand its definition of the thought. Marc Richir' phenomenology envisages a very specific kind of intuition in the mathematical practice. So, it offers an overhaul of what we call thinking.

ملخّص

يتمثّل موضوع هذه الدراسة في الإضافة التي يمكن أن تقود اليها إعادة صياغة الظاهراتية التي أقدم عليها مارك رشير بغية فحص بعض المسائل المرتبطة بابستيمولوجيا الرياضيات و خاصة بمسألة الحدس. لا يتعلّق الأمر بأخذ موقف داخل الجدال القديم بين النزعة الصورية و النزعة الحدسوية، و إنّما بمساؤلة مفهوم الحدس الرياضي على ضوء التطوّرات التي شهدتها الرياضيات خلال القرن العشرين. تمثّل الممارسة الرياضية شكلا من الفعل و من تجربة الفكر جدّ متميّزة، و ليس على الفلسفة أن تجد فيها بحثا عن الأسس و إنّما عليها أن تنطلق من هذه البراكسيس لتجعل التصوّر الذي تقترحه للتفكير أكثر شمولية. و يسمح فكر مارك رشير بتصوّر ضرب خاصّ جدّا للقوّة الحدسية داخل الممارسة الرياضية، و هو على هذا الأساس يدعو الى الى إعادة صياغة ما نسمّيه تفكيرا.

Résumé

L'article est consacré à l'apport que peut amener la refonte de la phénoménologie engagée par Marc Richir pour traiter quelques questions d'épistémologies des mathématiques, en particulier celle de l'intuition. Il ne s'agit pas de prendre position dans le débat ancien entre le formalisme et l'intuitionnisme, mais d'interroger, à la lumière de développements mathématiques survenus au cours du XX[e] siècle, le concept d'intuition mathématique. La pratique mathématicienne est un faire et une expérience de pensée spécifique ; la philosophie n'a pas à y chercher une fondation, mais à prendre acte de cette praxis pour élargir la conception qu'elle peut proposer de la pensée. La pensée de Marc Richir permet d'envisager un mode très spécifique d'intuitivité à l'œuvre à même l'activité formalisante, et par là, plaide pour une refonte de ce que nous appelons penser.

L'article ici présenté a été publié pour la première fois dans les *Annales de phénoménologie n°11/2012*[1]. Il est consacré à l'apport que peut amener la refonte de la méthode phénoménologique engagée par Marc Richir pour traiter quelques questions d'épistémologies des mathématiques contemporaines, et en particulier, la question de

[1] Le titre de notre article était alors « Mathématiques et concrétude phénoménologique ». Nous avons préféré passer le terme concrétudes au pluriel, la dimension de la pluralité étant importante dans notre développement.

l'intuition. Il ne s'agit pas de prendre position dans le débat, très ancien, entre le formalisme et l'intuitionnisme, mais d'interroger, à la lumière de développements mathématiques survenus au cours du XX^{e} siècle, et de paroles de mathématiciens, le concept même d'intuition mathématique qui doit être élargi sur un plan opératoire et épistémologique. La pratique mathématicienne est à la fois un faire et une expérience de pensée spécifique ; la philosophie n'a pas à y chercher une fondation, mais plutôt à prendre acte de cette praxis pour élargir la conception qu'elle peut proposer de la pensée. La pensée de Marc Richir semble intéressante pour cela. Elle permet d'envisager un mode très spécifique d'intuitivité à l'œuvre à même l'activité formalisante, et de là, plaider pour une refonte de notre conception de ce que nous appelons penser.

Remarques préliminaires sur la philosophie des sciences de Marc Richir

a. La physique de Marc Richir

Bien qu'elle ne se soit jamais définie comme épistémologie, la phénoménologie de Marc Richir a toujours revendiqué une attention soutenue aux développements scientifiques et à ce qu'ils éclairent ou révèlent des processus ou figures de la pensée. Malgré sa formation initiale de physicien, Richir a cependant davantage traité dans son œuvre de mathématiques que de physique. Cette préférence n'a rien de surprenant : s'il n'a pas proposé de phénoménologie de la physique, Richir mobilise son *ethos* de physicien pour sa pratique de la phénoménologie, et sa phénoménologie des mathématiques est précisément une phénoménologie de physicien[1]. La phénoménologie richirienne doit beaucoup à la formation de physicien initiale de Richir. Celui-ci y gagne en effet une forme d'utilisation à la fois libre et rigoureuse des concepts opératoires, une capacité à donner un statut à ce qui n'apparaît pas directement, à assumer l'indétermination d'une concrétude toujours effleurée « sur le vif ». Richir doit aussi à cette formation initiale une capacité à raisonner à partir de l'insaisissable. La mécanique quantique lui fournit par exemple des modèles cognitifs opératoires pour sa démarche : les questions d'action à distance, de particule fantôme, la problématique de la virtualité, du potentiel comme réalité concrète effective seulement dans ses effets *a priori* imprévisibles, innervent sa phénoménologie. La capacité du physicien contemporain à se maintenir dans la dualité quasi-insurmontable des modèles et de la réalité qui les motive, fournit presque l'exemple pratique de l'attitude dont la phénoménologie transcendantale richirienne se veut thématique et qu'elle entend pour sa part conduire à sa pureté.
Pour Richir, la problématique de la définition de l'objet physique est de part en part transcendantale : Richir en cela peut être rapproché d'une école d'épistémologue français dont les représentants sont Pierre Kerszberg (qui fut par ailleurs l'élève et le premier doctorant de Marc Richir), Michel Bitbol, Jean-Michel Salanskis ou Jean Petitot[2]. Pour ces savants, atomes et molécules sont les ré-interprétations physiques d'interprétations mathématiques données à des ensembles de phénomènes expérimentaux ; il ne s'agit certes pas de simples modélisations, mais il s'agit bien – c'est la leçon kantienne – de structures visant à dégager la cohérence et l'intelligibilité de l'objectivité sous-jacente aux

---

[1] Richir revendique explicitement l'inspiration « quantique » de concepts qu'il développe dans sa phénoménologie, en particulier lors qu'il thématise la question du virtuel. Cf. par exemple « La refonte de la phénoménologie », *Annales de phénoménologie n°7/2008*, p 207. Comme l'a signalé Albino Lanciani « Phénoménologie et réalité du physicien », dans Kerzberg, Mazzu, et Schnell, *L'œuvre du phénomène, Mélanges de philosophie offerts à Marc Richir*, Bruxelles, Ousia, 2009. En physique quantique « (...) *ce qui* se manifeste ne se manifeste que selon les moyens envisagés pour *le* faire activement se manifester (...) ». *Ibid.,* p 209-210.

[2] J. Petitot, « Idéalités mathématiques et réalité objective. Approche transcendantale », *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, Trans-Europ-Repress, Mauvezin, Paris, 1991, p. 226.

phénomènes constatés. Plus, par conséquent, la science est amené à « descendre » dans les profondeurs du réel physique, plus les mathématiques y prennent une place importante puisque la théorie s'appuie de moins en moins sur des phénomènes parcellaires, manifestés selon les formes de l'expérience donnée dans l'attitude naturelle, et de plus en plus sur les esquisses théoriques elles-mêmes pour en donner une interprétation globale. La redoutable question de cette ontologie est dès lors de comprendre en quoi les mathématiques ne sont pas seulement capables de s'appliquer au réel perceptif pré-structuré, mais en quoi elles sont effectivement capable de révéler quelque chose de la structure profonde du réel physique. La physique contemporaine révèle que les tréfonds du monde matériel se laissent de moins en moins décrire en terme d'une ontologie d'objet ; il s'agit moins sans doute de d'affirmer que la forme « ontologique » du niveau sub-atomique soit celle d'un champ actualisant des probabilités, que de montrer qu'à ce niveau, l'objectivation de la réalité du réel est inséparable de la participation à ce réel, que le point de vue est co-constituant de l'objectivité.

Cette question se pose de façon renouvelée à travers les paradoxes de la mécanique quantique. La singularité des observables quantiques apparaît radicalement contingente pour la théorie classique mais n'en manifestent pas moins l'insistance d'une chose, mais d'une chose dont l'objectivité est mathématiquement construite sans que cette construction puisse être physiquement et métaphysiquement interprétable. Marc Richir souligne fortement que les états quantiques ne sont pas représentables par les moyens classiques de la représentation physique ou philosophique. Leur représentabilité mathématique fait ainsi de la mécanique quantique une théorie physique mathématique transcendantale (au sens kantien du terme) qui a réussi à intégrer dans son appareil les conditions *a priori* de sa possibilité : l'objet de la théorie physique est un objet réel mais au sens transcendantal du terme. Richir souligne alors qu'« (...) il n'y a pas d'ontologie coextensive ou corrélative de la théorie quantique. Si la violation systématique des inégalités de Bell montre l'impossibilité d'attribuer à un système quantique des propriétés permanentes, ce n'est pas que le « réel » demeure « caché » ou « voilé », mais c'est au contraire qu'il n'a de sens physique qu'à être pris dans l'ordre du phénomène en lequel sont inclus, non pas les observateurs, en tant que contemplateurs, mais les appareils expérimentaux d'observation et de mesure »[1]

b. Les mathématiques dans la phénoménologie de Marc Richir

La phénoménologie richirienne des mathématiques n'est pas une phénoménologie des *opérations mathématiques* mais *du phénoménologique dans les mathématiques*. Le travail de Richir, certes inspiré et alimenté par celui de Desanti (auquel il renvoie à plusieurs reprises), n'en partage cependant pas la perspective. Là où Desanti entend élucider la structure du champ (ou des champs) eidétique(s) au sein duquel(s) se déploie l'activité mathématicienne, Richir dirige son attention sur les soubassements phénoménologiques de ces champs, et sur la façon dont le phénoménologique pénètre l'activité mathématicienne, se révèle en elle – l'égare parfois, d'une certaine manière la limite – mais aussi l'alimente.

Il s'agit moins pour Richir d'analyser le mode d'engendrement des théories ou d'en tirer des conséquences ontologiques, que d'exhiber leurs conditions de possibilité. Richir, comme Husserl, s'intéresse au mode de structuration du champ phénoménologique capable de fournir un milieu de déploiement à l'idéalisation mathématique, mais raisonne

[1] M. Richir, « Mécanique quantique et philosophie transcendantale », *La liberté de l'esprit, Crises*, Paris, Hachette, n°9-10, sept 1985, p. 209.

d'abord, pour sa part de manière *régressive*, en questionnant le type de détermination préalable des aperceptions qui les rendent « passibles » d'une saisie mathématiques, et qui ne sont ni un état originaire du champ, ni une superstructure qui en exprimerait la logique, mais le fait d'une institution spécifique. Comme tout lecteur de Richir ne peut manquer de le savoir, il ne peut pour lui y avoir de *fondation* phénoménologique des mathématiques, parce que celles-ci ne s'explicitent qu'à un certain niveau architectonique spécifique.

Comme l'explique Richir le registre architectonique peut être déterminé comme un « (...) registre de possibilités mutuellement structurées (...).[1] » L'identité, la logicité, sont caractéristiques d'un mode de phénoménalisation qui en implique directement la possibilité, mais ne peuvent en aucune manière être préfigurés à un niveau plus élémentaire de la genèse. Pour Richir par ailleurs, la logicité, n'est qu'une dimension des mathématiques, qui sont tout autant symboliques, et d'une façon qui reste à décrire, intuitives. Contrairement à la logique, qui relève d'une strate architectonique définie et d'une eidétique sédimentée, les mathématiques mettent en jeu du *sens* et non seulement des significations – plus exactement, elles font bouger, sculptent, plastifient les significations en les remettant sans cesse en jeu dans un horizon de sens se faisant, mais se faisant de telle façon que sa mobilité est maîtrisée. Pour le mathématicien, le champ des significations n'est pas flottant mais enraciné dans la concrétude phénoménologique. Pour user d'un autre langage, le ressenti du mathématicien en lui-même est subjectif, mais sans cette subjectivité, il n'y aurait pas de montée vers l'objectivité ; le champ est un champ incarné, un paysage mathématique, sans que cette concrétude qui l'habite ne puisse – contrairement à ce que pensait, par exemple, Merleau-Ponty – être reversée du côté du seul sensible. Les mathématiques, en quelque sorte, jouent – à leur niveau – avec leurs soubassements archaïques et sont par là amenées à rencontrer – parfois à révéler – des paradoxes que posent les processus de phénoménalisation. En ce sens, la phénoménologie richirienne des mathématiques aide aussi à comprendre pourquoi les mathématiques ont pu être prises comme le modèle du transcendantal – précisément parce qu'elles sont amenées dans leur activité à rencontrer et à se nourrir de problèmes posés par le transcendantal, même si elles ne peuvent les expliciter comme tels – dans leur transcendantalité.

Notre objectif ici est d'une part, de caractériser l'approche que Marc Richir propose des mathématiques, et d'autre part d'évoquer les échos que celle-ci semble trouver dans les problématiques épistémologiques contemporaines – en particulier dans le discours spontané des mathématiciens sur le développement de leur pratique. Notre ambition est essentiellement programmatique : nous entendons dégager le champ d'une confrontation possible des travaux de Richir avec l'épistémologie mathématique contemporaine. Pour cela, nous rappellerons d'abord, par quelques grands axes, comment la phénoménologie husserlienne des mathématiques se situe au confluent d'un processus de formalisation des mathématiques poursuivi tout au long du XIX^e^ siècle. Nous verrons ensuite quels amendements les développements mathématiques du XX^e^ siècle semblent imposer au projet d'une phénoménologie des mathématiques (insistance sur les structures plutôt que sur les formalismes seuls, inter-traductions des théories, statut d'une intuitivité difficilement assignable, etc.) pour insister sur les apports de la conceptualité richirienne à l'intelligibilité de ces problématiques.

[1] M. Richir, « Métaphysique et phénoménologie, Prolégomènes pour une anthropologie phénoménologique », *Phénoménologie française et phénoménologie allemande*, p. 107, Paris : L'Harmattan, 2003.

1. La formalisation et l'intuitivité du formel

a. La formalisation

Les mathématiques on le sait tendent, depuis le début du XIXe, à isoler les structures formelles explicitant les relations entre les objets qu'elles décrivent comme des *cas* dont il s'agit plutôt d'élucider la *légalité générale* dont ils dépendent.

La mise en place de la *théorie des multiplicités* de Riemann joue un rôle important dans ce mouvement de généralisation en modifiant radicalement le sens de la démarche mathématique[1]. Elle modifie en particulier celui de la distinction de l'arithmétique et de la géométrie et les façons de traiter ces deux domaines. Une multiplicité est en effet un *objet mathématique doté de lois formelles qui peuvent particulariser d'autres objets moins généraux* : on distingue ainsi les multiplicités *discrètes* (ou la comparaison des grandeurs s'effectue par *dénombrement*) et les multiplicités *continues* (où cette comparaison s'effectue par la *mesure*). Les espaces *géométriques* ne sont plus qu'un cas particulier des multiplicités continues, l'espace *tri-dimensionel* qu'un cas particulier de multiplicités *n-dimensionnelles*, l'espace *euclidien* un cas particulier d'espaces à *courbure constante*. Ces catégories de multiplicités n'ont pas, en elles-mêmes, de sens géométrique ni de sens arithmétique ; elles décrivent *l'engendrement de structures capables de décrire les lois de ce que nous connaissons intuitivement comme arithmétique ou géométrie*. En d'autres termes, elles caractérisent les opérations, de déductions, de raisonnements que l'on peut accomplir sur un certain type de multiplicité, c'est-à-dire des *types de théories constructibles*.

L'axiomatisation, prolonge et radicalise ce mouvement. En elle s'opère un *changement de statut des axiomes,* lesquels ne sont plus des impératifs *a priori*, mais des *objets* définissant des systèmes déductifs au sein desquels la démonstration se soumet aux seules règles de dérivation analytique. Ce changement pose d'ailleurs des questions graves à la démarche mathématique tout entière puisque c'est *la forme même de la démonstration et la démontrabilité qui est prise comme objet*. Une révision générale de l'ensemble de ce qui paraissait jusqu'alors comme des évidences accompagne ce tournant. Quel est en effet le statut des démonstrations s'appuyant sur des données intuitives ? La question peut en fait être retournée puisque longtemps, les démonstrations se sont restreintes à un champ qu'elles ne posaient pas comme tel et au sein duquel elles jouissaient bien d'une évidence valable ; *c'est seulement à partir du moment où la définition formelle des problèmes outrepassait leur champ actuellement productible, suscitait des questions portant sur la formulation même de la définition (et non plus sur les exemples) que le regard mathématique s'est retourné des objets définis aux lois de leur définition*.

Le programme de Hilbert, enfin, est la plus ambitieuse tentative d'assurer de manière stable et rigoureuse les fondements des mathématiques. Son influence sur la phénoménologie naissante est d'autant plus forte que Husserl fut, on le sait, le collègue de Hilbert à Göttingen et l'auditeur de ses conférences. On peut, selon Frédéric Patras[2], déterminer quatre influences majeures à ce programme. 1) La première concerne *la légitimation de l'usage de géométries non-euclidiennes*. Avec Cayley, puis Klein, a lieu ainsi l'absorption des propriétés métriques dans les propriétés projectives des figures: la géométrie est

[1] Nous nous inspirons ici de l'analyse très fouillée que fait Dominique Pradelle dans *L'archéologie du monde, Constitution de l'espace, idéalisme et intuitionnisme chez Husserl*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.
[2] F. Patras, « L'horizon sémantique et catégorial de la méthode axiomatique », *Noesis n°5, 2003 : Formes et crises de la rationalité au XXe siècle.* Toutes nos remarques sur le programme de Hilbert sont tirées de cet article.

« arithmétisée » et ses nouveaux objets sont engendrés formellement, sans que l'intuition n'y joue plus aucun rôle normatif. La généralisation projective de l'arithmétique permet de la sorte de construire aussi bien des modèles euclidiens que des modèles non-euclidiens[1]. 2) La seconde influence vient de *l'axiomatisation du continu*, à travers les travaux de Dedekind, Weierstrass, et Cantor[2] . 3) La troisième influence, plus subtile, est celle de la théorie *Gallois*. Hilbert remarque en effet que l'abandon de l'hypothèse de continuité permet de décrire, sur *les structures mises en place par la* théorie de *Gallois* (la clôture quadratique réelle du corps des rationnels) toute la géométrie euclidienne[3]. Pour la première fois, en d'autres termes, *la relation entre un système d'axiomes et les objets qu'il décrit est ébranlée*. Une même axiomatique peut se « projeter » sur plusieurs systèmes d'objets différents, ce qui ouvre la voie à la théorie des modèles et à la distinction des analyses syntaxiques et sémantiques des théories mathématiques qui joue un rôle important dans la réflexion de Husserl. La notion de complétude joue un rôle important pour éclairer le sens de cette distinction[4]. 4) La quatrième évoquée par Patras est *celle de tentatives d'axiomatisations antérieures* (Moritz Pasch ou l'école italienne avec Giuseppe Peano et Giuseppe Veronese). En dépit de son désir d'évacuer tout recours intuitif, Hilbert demeure toutefois soucieux de ne pas rompre le rapport intuitif originellement noué au sein des premières constructions mathématiques[5]. En cela, il est également un modèle pour l'épistémologie husserlienne[6] qui, si elle prend vigoureusement partie pour le formalisme, entend cependant toujours aussi conserver en lui la trace de son fondement intuitif et retrouver sa forme propre d'intuitivité (même si, on y reviendra la doctrine husserlienne de *l'intuition catégoriale* peut s'avérer trop pauvre pour soutenir une telle mission).

---

[1] F. Patras, « C'est en 1871 que Felix Klein montre que les travaux de Arthur Cayley sur les transformations projectives conduisent à un modèle de la géométrie hyperbolique de Nicolaï Lobatchevski, avec ce corollaire que les géométries non euclidiennes n'ont pas moins de légitimité ontologique que la géométrie euclidienne. Au niveau logique, cela se traduit par la perte d'une nécessité inconditionnelle des axiomes », *Ibid.,* p. 13-14.

[2] F. Patras, « Hilbert remarque que le caractère de consistance des axiomes de la géométrie euclidienne est une conséquence de la propriété correspondante pour la théorie des nombres réels. Aussi, si l'on admet l'équation vérité = consistance, la vérité en géométrie est reconduite aux propriétés du continu, des nombres et, indirectement, à la théorie des ensembles qui sert, depuis Cantor et Frege, à fonder le concept de nombre », *Ibid.,* p. 15-16.

[3] F. Patras, « En termes épistémologiques, cette remarque se traduit par la possibilité de réaliser un même système d'axiomes dans différents modèles : on a affaire à une axiomatique ouverte lorsque ces modèles ne sont pas deux à deux équivalents », *Ibid.,* p. 17.

[4] On peut, selon Suzanne Bachelard, distinguer 4 sens de la complétude 1) la complétude syntaxique au sens faible, c'est-à-dire l'inextensibilité du système d'axiomes, 2) la complétude syntaxique au sens fort (décidabilité de toute proposition formulable dans la théorie, le fait autrement dit que toute proposition formulable dans la théorie soit ou vraie, ou fausse), 3) la complétude sémantique (existence d'un modèle de la théorie tel que la démontrabilité d'une formule dans la théorie équivaille à sa satisfiabilité dans le modèle), 4) le concept sémantique de modèle maximal (inextensibilité du système d'objet vérifiant le système d'axiomes).

[5] F. Patras, « L'horizon sémantique et catégorial de la méthode axiomatique », p.18, *op.cit.* : « Il y a derrière cela un souci constant, chez Hilbert et dans toute l'école hilbertienne : trouver un juste équilibre entre le formalisme et le développement nécessaire des axiomatiques – que ce soit en géométrie ou en algèbre – et, d'autre part, le renvoi aux fondements intuitifs de la pensée mathématique qui forment le support de l'activité concrète du mathématicien. ». Nous aurons plusieurs fois l'occasion d'y revenir : l'ordre d'apparition des objets, les conditions de possibilité des intuitions elles-mêmes, sont tout aussi importantes, pour une démarche rigoureuse, que l'ordre axiomatique.

[6] J. English, « Husserl et Hilbert. La phénoménologie est-elle axiomatisable ?, *Sur l'intentionnalité et ses modes*, Paris, PUF, 2005.

b. Le projet husserlien

Irrigué par les mouvements que nous venons d'évoquer, le projet husserlien de fondation phénoménologique des mathématiques se déploie selon deux orientations liées. Il s'agit en effet d'abord pour Husserl de clarifier les *mécanismes d'idéalisation* à l'origine de la position d'idéalités mathématiques. En distinguant les processus simplement abstractifs des processus idéalisant (distinguant ainsi les nombres intuitifs, utilisés par les opérations spontanées de dénombrement, et la série arithmétique comme telle, posée dans sa légalité formelle), mais surtout en étudiant les processus d'enchaînement d'actes intentionnels par lesquels ces processus sont coordonnés, Husserl entend préciser le statut des *universaux mathématiques*. Les objets-nombres de premier niveau peuvent ainsi être eux-mêmes pris comme « *sense data* » d'actes intentionnels de deuxième niveau, « (…) ayant eux-mêmes pour corrélat objectaux des types de nombres et de concepts numériques de deuxième niveau.[1] » Ce processus d'idéalisations successives permet alors de déterminer réflexivement les concepts structurant l'idéalisation comme telle : ce qui est idéalement posé dans le cas de l'arithmétique, ce ne sont pas seulement des nombres de second niveau mais aussi des liens catégoriaux entre eux, pouvant à leur tour être l'objet d'une position spécifique[2]. De cette façon, Husserl donne à la phénoménologie pour projet la clarification des universaux constitutifs des propositions : sujet, prédicat, objet, propriété, etc., mais tout aussi bien des catégories de l'*ontologie formelle* corrélatives des premiers (unité, ensemble, tout, partie).

L'aspect ontologique en effet est lui-même le corrélat de l'aspect apophantique ; là où l'apophantique déploie des structures noétiques, l'ontologie formelle rend compte de leurs contreparties sur le plan noématique. En d'autres termes, les actes instaurent des positions d'objets. Il s'agit bien ici pour Husserl de montrer que les formalismes ne sont vides qu'en apparence, et qu'ils sous-entendent toujours la position, au moins implicite, des objectités qui en valident les systèmes ; la définition même des systèmes axiomatiques présuppose une visée d'objet, donc la forme générale d'un remplissement possible : la logique ne se pose elle-même comme logique pure qu'en ce qu'elle prend ce double sens apophantique et ontologique. Mais cette inhérence du « logique pur » et de l'ontologique demeure cachée au mathématicien qui ne raisonne pas sur le sens et la structure des actes par lesquels il produit des systèmes d'objets. Elle ne se révèle pleinement qu'à l'analyse phénoménologique qui reconnecte les systèmes d'objets posés aux systèmes d'actes dans lesquels ils peuvent être posés. Si la conscience vise toujours implicitement les formes d'objet validant les systèmes d'axiomes, c'est bien en effet que ceux-ci tirent eux-mêmes leur sens de ce qu'ils décrivent l'ensemble des enchaînements d'actes d'un *ego* transcendantal, que la description husserlienne vise toujours la double dimension noétique et objective[3]. La dimension ontologique ne constitue qu'un versant d'une systématique des actes de conscience dont la connaissance est le *telos* ; si elle peut, comme y insiste Husserl, être méthodologiquement séparée du tout de la doctrine de la science et

---

[1] J. Petitot, « Idéalités mathématiques et réalité objective. Approche transcendantale », *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, p. 240, Paris : Trans Europ Repress, 1991.

[2] Cf. à ce sujet Dominique Pradelle, « Qu'est-ce qu'une intuition catégoriale de nombre », dans Jocelyn Benoist et Jean-François Courtine (éds), *Les Recherches Logiques, une œuvre de percée*, Paris, PUF, 2003.

[3] E. Husserl, *Logique formelle et logique transcendantale*, p. 198 : « Le double sens corrélatif d' « évidence » et de « vérité » que nous avons mis en lumière implique aussi manifestement un d*ouble sens corrélatif de logique formelle* : en partant de *l'orientation* traditionnelle *vers les jugements* (...) nous obtenons une *logique apophantique* (...). Si nous privilégions *l'orientation vers les objectités catégoriales possibles* elles-mêmes ou plutôt vers leur forme, alors (...) nous mettons en mouvement une *logique ontologico-formelle* mais qui (...) sera cependant astreinte pour des raisons de méthode, à prendre les objets en tant que sens, mais seulement comme moyens, tandis que le dessein final concerne les objets. ».

posée comme tâche même s'il sera toujours à nouveau possible de rendre claire la signification épistémologique de cette ontologie. Cette logique pure – ainsi phénoménologiquement constituée dans sa pureté – reçoit alors son armature fondamentale dans l'élaboration – dans la continuité du projet riemannien, d'une théorie des types de théories. Celui-ci constitue au sein de la logique pure une *mathesis universalis* : les types de théories, sur le plan apophantique, renvoie en effet pour Husserl à des «mondes » ; de cette façon, Husserl entend exposer « l'idée logico-formelle d'un monde en général », comme « totalité compossible d'objets en général »[1].

c. La reforme du projet husserlien et la necessite d'une prise en compte du phenomenologique dans les mathematiques

Le projet husserlien, tel que projeté par son auteur, s'est cependant – on le sait – heurté aux résultats mathématiques eux-mêmes. Le *théorème d'incomplétude* de Gödel stipule ainsi qu'on ne peut démontrer la complétude syntaxique d'un système formel capable d'engendrer l'arithmétique qu'à l'aide de moyens importés de théories plus grandes, autrement dit que les ressources de tout système formel suffisamment riche ne suffisent pas à statuer sur tout ce qui s'y énonce. De son côté, le théorème de *Lövenheim* affirme que l'axiomatisation ne permet pas la dominabilité *a priori* de tout le champ d'objets, que les modèles infinis échappent au « contrôle » des systèmes axiomatiques qu'ils vérifient en ce qu'ils admettent l'extension illimitée de leur champ d'objets. Les règles *syntaxiques* sont incapables de fonder la normativité de la constitution des champs d'objet mathématiques.

Pour autant, le projet de *mathesis universalis* n'en est pas condamné : la *mathesis universalis* peut aussi bien désigner la possession définitive des bornes du champ de l'objet en général que *la maîtrise active et opérante de ce champ*. Les développements qui ont suivi le théorème de Gödel montrent en effet bien que celui-ci, loin de limiter les prétentions du domaine formel, *les étend au contraire considérablement* en décrivant les conditions de détermination d'un modèle axiomatique adéquat à ce que l'on souhaite y démontrer. Cette distinction est clairement soulignée par Suzanne Bachelard dans *La logique de Husserl*. La capacité de déterminer mathématiquement les tenants et aboutissants du choix d'un certain système formel est un gain d'intelligibilité considérable concernant les conditions de son utilisation. Ainsi, il faut prendre en considération un changement de l'activité mathématique, qui place l'idéal normatif au niveau d'une dynamique de l'activité de recherche et laisse s'accomplir la *mathesis universalis* dans sa correspondance avec le *telos* de l'activité mathématicienne. Il suit de cela que l'axiomatisation n'est plus une occupation préalable mais *la matière même de son travail quotidien*[2]. Si cette transition fait s'effondrer l'idéal husserlien d'une stratification logique établie une fois pour toutes, *elle n'en est pas moins en consonance avec le telos de l'activité phénoménologique elle-même, et renforce d'une certaine façon le cercle de la logique transcendantale et de la logique formelle, des idéalités mathématiques et des horizons dans lesquels elles sont posées.*

On peut trouver une confirmation de cette interprétation dans l'ouvrage collectif dirigé par François Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*. Celui-ci, qui donne un aperçu remarquable sur les développements mathématiques dans la première moitié du XX[e] siècle, propose en particulier un article du groupe Bourbaki « L'architecture des

[1] Ce que Dominique Pradelle montre de façon précise dans *L'archéologie du monde*, *op.cit.*

[2] Suzanne Bachelard, « « L'axiomatique-fondation » s'est muée en une « axiomatique arborescente » ; ou, si l'on veut, l'axiomatisation est passée du stade statique au stade dynamique », *La logique de Husserl, étude sur « Logique formelle et logique transcendantale »,* p. 113, Paris, PUF, 1957.

mathématiques » sur le rôle éminent de l'axiomatisation dans les mathématiques de l'époque et sur l'interprétation qu'on peut en avoir

« (...) la méthode axiomatique trouve son point d'appui dans la conviction que, si les mathématiques ne sont pas un enchaînement de syllogismes se déroulant au hasard, elles ne sont pas davantage une collection d'artifices plus ou moins « astucieux », faits de rapprochements fortuits où triomphe la pure habileté technique. Là où l'observateur superficiel ne voit que deux ou plusieurs théories en apparence très distinctes (...), la méthode axiomatique enseigne à (...) trouver les idées communes enfouies sous l'appareil extérieur des détails propres à chacune des théories considérées (...)[1] »

Ainsi, les mathématiques modernes substituent peu à peu l'idée au calcul puisqu'il s'agit de saisir l'unité d'un domaine d'objets derrière la multiplicité de ses aspects, et de se laisser guider par l'idéal d'unification de ces domaines (en décrivant les formes canoniques de ses objets, en en exhibant la structure propre). La recherche mathématique s'éloigne des objets individuels et se situe au niveau des champs d'objets, mais ce structuralisme ne se veut pas cependant, un fondationnalisme, mais bien plutôt une mise en ordre. En insistant sur *l'idée* Bourbaki souligne l'aspect dynamique du processus axiomatique. Il ne vise pas, pourrait-on dire, la présentation d'une *mathesis universalis* complète et fixe, mais – dans une perspective que Lautman, Cavaillès, et, dans un langage et une terminologie plus nettement husserlienne, Desanti, ont poursuivie – l'engendrement progressif de champs idéaux auto-explorant leurs virtualités.

Au cours du XX^{e} siècle, ainsi, la poursuite de l'élucidation des grandes structures mathématiques s'accompagne d'une description plus « morphologique », basée sur des questions d'inter-traductions entre les théories et les domaines, donc, de la description d'objets capables de rendre compte de la richesse des contenus et non plus seulement de leur armature logique. Plus que jamais, les objets mathématiques sont élaborés à partir de systèmes d'horizons, dont il ne s'agit plus de les abstraire, mais au contraire, de saisir le caractère d' « horizontalité interne ». L'accent mis sur les structures gagne ainsi un degré de généralité avec le développement de la théorie des catégories. Il s'agit ici de décrire, *non plus une forme de théorie, mais les formes générales selon lesquels des types d'objets mathématiques différents sont liés à leurs sous-objets* : de la sorte, il s'agit de « considérer comme structure » différents types de réalités mathématiques. S'amorce alors une pratique « dynamique » des mathématiques, s'intéressant à la *circulation* inter-objective et à ses règles, aux transformations des structures et aux stabilités de leurs propriétés selon ses transformations, etc.

[1] *Les grands courants de la pensée mathématique*, « L'architecture des mathématiques » p. 38, Paris, Hermann, 1997.

d. L'intuitivite phenomenologique du formel[1]

Le commentaire proposé par Frédéric Patras de *Triangle de pensées*[2], le livre entretien croisé d'Alain Connes, d'André Lichnernowitz et de Marcel-Paul Schützenberger, nous servira de point final pour appuyer la nécessité d'une réélaboration d'une pensée phénoménologique de l'intuitivité mathématique en nous permettant de préciser – à travers des paroles de mathématiciens – quelques traits de cette intuitivité. Ainsi Lichnerowicz distingue-t-il le *discours de communication* et le *discours de création* des mathématiciens. Le discours de communication, par essence, est formel, et doit être préservé de tout engagement ontologique comme de toute ambiguïté intuitive. Le discours de création, de son côté est prescriptif et phénoménologique : il s'agit à travers lui de « saisir » quelque chose. La structure d'une théorie mathématique est inséparable d'une forme de possession intuitive appartenant à ses conditions d'emploi, mais les débordant toujours aussi. De cette façon, les structures définissent un « environnement » particulier, un véritable « monde environnant » :

« On ne saurait trop insister sur le rôle fondamental que joue dans ses recherches, une intuition particulière (2) qui n'est pas l'intuition sensible vulgaire, mais plutôt une sorte de divination directe (antérieure à tout raisonnement) du comportement normal qu'il semble en droit d'attendre, de la part d'êtres mathématiques qu'une longue fréquentation lui a rendu presque aussi familiers que les êtres du monde réel. Or, chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique que nous avons décrite plus haut ; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut.[3] »

La description est phénoménologiquement tout à fait remarquable. Le monde mathématique est, comme le monde naturel, régi par certaines *anticipations*, par des horizons d'attente, par un certain style général induisant un certain « comportement » de la part des objets qui lui appartiennent, certaines associations, cours qui peut cependant être infléchi en « reconfigurant » le rapport avant-plan, arrière-plan, variant les lieux sur lesquels se porte « l'intérêt théorique » et ceux qui n'en forment que l'horizon, etc. La pensée mathématique procède par découverte de similitudes en cherchant le langage en

---

[1] Sans insister, rappelons que cette question insiste à deux niveaux chez Husserl. D'une part, avec la thématique de l'intuition catégoriale, et d'autre part, avec celle de la géométrie. La géométrie n'est pas intégralement assujettie au formalisme. Elle relève aussi d'une eidétique du monde matériel. A ces deux niveaux, on peut ajouter celui du flux de la conscience intime du temps, et de l'intérêt que cette question suscita chez des mathématiciens intéressés par la question du continu, comme H. Weyl. Pour Husserl, la géométrie invite le phénoménologue à tourner son regard vers la logique transcendantale qui prépare le sol anté-prédicatif où prend pied la logique formelle : le concept de multiplicité semble échouer à caractériser l'objet propre de la géométrie parce qu'il ne porte plus, en lui, de sens proprement géométrique. Ainsi le sens originaire de la géométrie n'est pas séparable de ses proto-idéalités, des figures qui ont été ses objets originaires ; toute l'activité mathématicienne, présuppose un monde pré-donné d'objets extra-mathématiques, constitué originairement par les figures spatiales, propriétés intrinsèques des objets apparaissants. La structure eidétique de l'apparaître sensible constitue pour l'activité idéalisante de la conscience un fondement dont la science ne peut se couper totalement, au risque de perdre le sens de son formalisme. Cf. sur ce sujet D. Pradelle, *L'archéologie du monde*, *op.cit.*

[2] Paris, Odile Jacob, 2000.

[3] Bourbaki, *Les grands courants de la pensée mathématique*, « L'architecture des mathématiques », p. 42, *op.cit.*

lequel les formuler[1], et « (...) progresse, entre autres, en analysant la structure interne de son rapport aux objets (...) ».[2]

Le platonisme d'Alain Connes est également phénoménologiquement très prégnant. Alain Connes évoque *la réalité archaïque des nombres* et soutient que le domaine du vrai ne se restreint pas au domaine d'inférence des axiomes d'une théorie. Cette réalité *résiste* ; elle est une *source inépuisable d'informations*. Elle impose (ou propose) des notions ou des intuitions fondamentales (comme le concept de point) qui peuvent et doivent être enrichies par l'élaboration formelle qui les stabilise et s'auto-transforme pour leur rester fidèle. Ici, les traits d'intuitivités dégagés par Connes diffèrent radicalement de ceux évoqués par Lichnerowicz (la *résistance* de la réalité s'impose par la découverte de champs de congruences inter-théoriques, par des « problèmes universaux », dans le langage de la théorie des catégories, qui traversent et excèdent les élaborations qu'on en donne), mais, selon nous, les complètent, en insistant sur la nécessité, pour le mathématicien, de *rencontrer* quelque chose et sur les formes de cette rencontre dont la modalité est toujours aussi celle du *surgissement*.

Le ré-enracinement du formalisme mathématique dans une concrétude se fait en résumé dans deux directions. La problématique ontologique husserlienne semble devoir être amendée : les formalismes ne sont pas vides parce qu'ils renvoient à des champs d'objets (cette objectivité est constituée et définie en eux) mais parce que cette constitution est elle-même motivée par le milieu phénoménologique au sein duquel s'effectue l'activité mathématicienne. S'il est *symboliquement inconstituable* dans sa réalité, le réel mathématique autrement dit n'est pas sans *poids*.

La difficulté d'une théorie de l'intuition semble ainsi philosophique plus que mathématique. L'intuition apparaît comme ce qui secoue l'emprise d'une ontologie naïve sur les mathématiques. Elle y insiste de manière polymorphe : trace ou transposition de la corporéité, praxis, etc. Dans un article intéressant, Jocelyn Benoist souligne d'une autre façon la dimension éminemment phénoménologique de la démarche à l'œuvre dans la théorie des catégories[3] et l'intérêt de cette dernière en vue d'une refonte du concept d'intuition catégoriale. La théorie des catégories adopte en effet une nouvelle forme de structure basée sur l'idée de transformation, sur des mises en rapport de structures, voire des mises en rapport des mises en rapport.

Cette méthode se caractérise en particulier par une dimension d'intuitivité, en dépit de son extrême abstraction. Pour Benoist, ce qui frappe dans l'exposé introductif de Lawvere et Schanuel à la théorie des catégories, c'est son tour intuitif : « (...) cette formalité *n'exclut pas l'intuitivité et même, en un certain sens, est en son fond intuitive.*[4] » La théorie des catégories invite autrement dit à une réforme du sens de l'intuition, celle-ci permettant de rendre « perceptibles » des rapports de structures abstraites en leur donnant par exemple un sens là encore « topologique ». Il y a là pour Benoist une forme

---

[1] F. Patras, « Il faut trouver les structures au sein desquelles il trouvera une expression correcte et libérera son potentiel de résultats originaux. » Patras, évoquant Grothendieck, ajoute que le travail du mathématicien est toujours aussi de transgresser les limites imposées aux objets par leurs définitions. », *Ibid.,* p. 371.

[2] F. Patras, *Ibid.,* p. 364.

[3] J. Benoist, « Mettre les structures en mouvement: la phénoménologie et la dynamique de l'intuition conceptuelle. Sur la pertinence phénoménologique de la théorie des catégories. », Kerszberg, Patras, Loi (éds), *Rediscovering Phenomenology, Phenomenological Essays on Mathematical Beings, Physical Reality, Perception and Consciousness*, New York, Springer, 2007

[4] J. Benoist, *Ibid.,* p. 353.

d'intuition catégoriale qui n'est plus essentiellement syntaxique et semble avoir un caractère essentiellement opératoire : il s'agit moins de saisir des articulations que d'accomplir des gestes : l'intuition catégoriale en d'autres termes n'est plus tant une intuition du formel qu'une ré-insertion du formel dans une *praxis*.

Paysages, rencontres, surgissements deviennent ainsi des traits phénoménologiques de l'intuition mathématique[1].

2. Les mathématiques comme auto-régulation de leur propre prolifération

a. Un champ d'idealites

Richir rencontre à maintes reprises les mathématiques dans sa réflexion et leur fait jouer un rôle souvent paradigmatique pour la mise au point des concepts fondamentaux de sa phénoménologie que sont les rythmes et leur phénoménalisation, ou ce qu'il désigne comme le schème de la répétition se répétant. Il s'agit pour Richir d'examiner les structures profondes du champ, à travers lesquelles la position d'idéalités et leur jeu s'avère possible. Il s'agit également de comprendre comment les idéalités sont amenées à se structurer et s'éclairer mutuellement, et en quoi une telle interdépendance est transcendantalement nécessaire ; la structuration d'un champ d'idéalités constitue pour Richir l'élaboration d'une indétermination constitutive de l'idéalité, inscrite dans la structure profonde du schématisme. La dimension phénoménologique est de cette façon particulièrement impliquée dans les processus de l'*invention* mathématique[2]. Si en effet, l'activité mathématicienne relève pour Richir d'une part du *sens se faisant*[3] – le mathématicien cherche à expliciter quelque chose qu'il touche d'une certaine façon sans parvenir à le tenir tout à fait – elle est d'autre part une activité strictement normée qui, de façon en apparence paradoxale, est par-là même capable d'une certaine forme de réflexion de structures fondamentales du champ phénoménologique, à partir desquelles elle élabore et enrichit ses concepts directeurs que sont l'unité, l'infini, l'espace, etc.

Pour Richir on l'a dit, une phénoménologie transcendantale ne peut en aucune manière engendrer de mathématique transcendantale, mais seulement décrire les principes d'ajustement des « ingrédients phénoménologiques » qui interagissent dans la pensée

[1] Nous laissons de côté ici l'autre volet de ces questions : l'interprétation wittgensteinienne de la praxis mathématique à partir de l'idée de règle. Pour une mise en dialogue des deux perspectives, on pourra se référer à J. Petitot, « Idéalités mathématiques et réalité objective. Approche transcendantale », *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, Trans-Europ-Repress, Mauvezin, Paris, 1991.

[2] M. Richir, *La crise du sens et la phénoménologie*, Grenoble, Million, 1990, « La « crise » des sciences européennes et le sens de l'épistémologie phénoménologique », p. 253-254. Richir évoque J. Hadamard, *Essai sur la psychologie dans le domaine mathématique*, Paris, 1959.

[3] Il serait impossible d'exposer ici le concept de sens que développe Richir. En cette remise en chantier, le sens est désarrimé : 1) de l'être et de l'ontologie, dans la continuité d'une brèche déjà ouverte par la pensée autrichienne de la fin du XIXe siècle : le sens n'est pas nécessairement fondé dans un sens d'être, ses lois ne sont pas les lois des objets, on peut faire plus et autre chose avec le sens que dire le vrai ; 2) de la signification, dans la continuité en particulier de l'idée merleau-pontyenne de sens perceptif : le sens n'est plus nécessairement la signification, et est considéré dans sa transitivité au sensible, en tant que dimension sensible de la pensée elle-même ; 3) de son contenu, enfin, dans la mesure où le sens est appréhendé comme transitivité, comme impulsion, dans le geste autrement dit de son être-sens, qui n'est pas accès à un contenu extérieur, mais ouverture en son propre froissement à l'espace de l'intelligibilité : comme sens se faisant. Cf. à ce sujet Alexander Schnell, *Le sens se faisant*, Bruxelles, Ousia, 2011. Pour une brève, mais éclairante présentation de ce concept, on pourra aussi consulter l'article de Robert Legros, « Sur la fidélité de Marc Richir à l'inspiration husserlienne », dans Kerszberg, Mazzu, Schnell (éds), *L'oeuvre du phénomène. Mélanges de philosophie offerts à Marc Richir*, Bruxelles, Ousia, 2009.

mathématique. Les mathématiques ne sont pas téléologiquement orientées par l'idée de leur application à la description du sol naturel dont elles ne procèdent par ailleurs pas. L'activité mathématique naît au contraire au sein du champ symbolique, utilise les ressors d'un langage, se place d'emblée dans l'horizon de l'intelligible. Ainsi, « (...) il y a une « nécessité » dans l'institution symbolique, et (...) le logico-mathématique, sans origine phénoménologique, contrairement à ce que pensait Husserl ne commence qu'avec elle.[1] » Dans *Phénoménologie en esquisses*, Richir précise que

« Les idéalités logiques sont des êtres de langue « prélevés » sur la langue ou « extraits » de son registre et les idéalités auxquels ces êtres se rapportent sont finalement des êtres d'aperception. Le réel perd toute portée fondatrice par rapport à la *Stiftung* de l'idéalité.[2]

L'activité mathématique est alimentée par le sens et capturée par les signes autant qu'elle est réglée par sa logicité. Elle est intuitive et symbolique autant que logique-formelle. De la même façon qu'une grammaire ne résume pas un style, qu'une grammaire peut même voir ses formes varier selon l'usage qui est fait des capacités expressives et descriptives d'une langue, la logique n'est qu'une ossature elle-même mouvante de l'horizon théorique mathématique, ossature certes capitale, mais dont l'étude seule ne peut rendre compte de l'ensemble de l'activité mathématicienne et encore moins de sa phénoménologie. De cette façon, une spatialité propre caractérise bel et bien le champ des idéalités mathématiques ; celle-ci est un effet de trace, de transposition de la proto-spatialité/proto-temporalité originaire du champ phénoménologique, et n'est donc pas homogène à la spatialité perceptive-sensible.

« (...) l'idéalité n'est pas a priori ponctuellement présente dans l'intuition comme le serait une chose perçue par aperception perceptive (...) mais (…) elle est pourtant bien, à sa façon, en présence, dans ce que JT Desanti appelle « champ de conscience » (...)[3] »

Si l'intuitionnisme de Brouwer pêche, selon Richir par sa naïveté transcendantale en ce qu'il prétend prescrire *a priori* des limites à l'activité mathématiques, et définir un champ du constructible au-delà duquel il n'est plus d'objectivité qui puisse être rigoureusement posée, le formalisme n'en pêche pas moins en éliminant de sa sphère d'intérêt la question de l'élégance des objets et des théories. De la sorte, la pensée mathématique

« (...) s'y retrouve orienté aussi, toujours déjà, par la médiation des catégories d'unité et de totalité, qu'elle constitue dans cette multiplicité des groupements, des systèmes, des relations, en lesquelles s'établit chaque fois la corrélation de l'unité d'un point de vue et de l'unité d'une multiplicité rassemblée en totalité.[4]»

Ces catégories, précisons-le, ne sont donc pas des absolus donnés mais des horizons herméneutiques eux-mêmes variables au sein de l'horizon théorique dont ils sont autant des charnières que des objets. Il y a ainsi dans les mathématiques un aspect auto-normatif, qui ne se manifeste cependant pas par une élucidation axiomatique définitive, mais par une tension des théories vers leur propre intelligibilité qui conduit sans cesse le mathématicien à isoler thématiquement des objets du champ originaire auxquels ils appartiennent, pour en explorer la structure pour elle-même et exploiter sa fécondité en

[1] M. Richir, *Recherches phénoménologiques IV et V, Du schématisme phénoménologique transcendantal*, Bruxelles : Ousia, 1983, p. 115.
[2] M. Richir, *Phénoménologie en esquisses*, Grenoble, Jérôme Millon, 2000, p. 511.
[3] M. Richir, *Phénoménologie en esquisses*, *op.cit.*, p. 511.
[4] M. Richir, *Recherches phénoménologiques IV et V*, *op.cit.*, p. 114.

la « projetant » sur d'autres horizons. Ainsi, « (...) la *Stiftung* logico-mathématique est sans doute la seule institution symbolique capable de régler elle-même de façon stricte ses propres proliférations.[1] »

Voyons dans le détail la façon dont le zig-zag architectonique permet d'éclairer des énigmes purement mathématiques en analysant l'interprétation phénoménologique que Richir donne de quelques *exemples.*

b. La fondation de l'arithmetique et le scheme transcendantal de la quantite

Dans les tentatives dédekindienne et frégéenne de fondation de l'arithmétique, d'une part, dans les apories rencontrées par Cantor avec la mise en place de la théorie du transfini, d'autre part, c'est bien la question de l'individuation (de l'unité comme de l'infini) qui est rencontrée. La pensée mathématique, montre Richir, ne peut se saisir et se déterminer « avant » qu'elle ne se soit posée ; elle ne peut enjamber son mouvement positionnel de ses objets pour donner un sens définitif, univoque, transcendantal, à ses concepts fondamentaux que sont l'unité et l'infini. Mais – c'est-là que Richir se distingue des formalistes qui ne voient, à cette constatation, qu'une prise en compte de la nécessité de définir des objets pour les étudier – ce mouvement positionnel lui-même prend « du temps et de l'espace ». En ce sens, il ne peut s'extraire de la concrétude en laquelle il se fait – mais peut en quelque sorte réfléchir, au moins indirectement, cette altérité phénoménologique en lui pour en faire la ressource des processus d'engendrement symboliques et conceptuels[2].

Dans la *Recherche Phénoménologique IV*, Richir examine les difficultés rencontrées par Dedekind dans son essai sur les nombres, *Was sind und was sollen die Zahlen*, tout en se référant plus particulièrement à la *lettre à Keferstein* du 27 février 1890. Le projet de Dedekind, bien qu'il ait pu être interprété comme une tentative axiomatique, a selon Richir un caractère *transcendantal* puisqu'il s'agit de décrire le « noyau logique pur », c'est-à-dire les « (...) lois élémentaires selon lesquelles l'esprit humain procède à la *libre création* des nombres (...) [3]». Ce caractère met de cette façon en exergue les présupposés de sa démarche – qui sont les *présupposés transcendantaux* que Dedekind retrouve et exprime et non des présupposés qui lui seraient propres. Il s'agit pour Dedekind d'une part d'isoler les *propriétés fondamentales* de la suite N, mais d'autre part d'en rechercher les *conditions de possibilité*. Comme le demande Richir cela suppose que les deux problèmes puissent être traités séparément, de se demander si « (...) la solution du premier n'est pas tellement liée à la solution du second, et réciproquement, qu'ils ne peuvent être dissociés (...)[4]. »

La suite N est abstraitement posée comme un ensemble, au sein duquel chaque élément est considéré comme d'emblée absolument individué (le point est important). Pour Dedekind, il n'y a pas d'ensemble vide : n'est élément d'un ensemble que ce qui peut être objet de pensée. Il s'agit alors de définir sur cet ensemble le *concept de succession* : celui-ci doit être compris de façon abstraite, comme une *application* de ensemble dans lui-même

---

[1] M. Richir, *Phénoménologie en esquisses*, « Quelques remarques pour l'analyse de la *Stiftung* de l'idéalité », *op.cit.*, p. 511.

[2] On peut considérer que les trois articles de Richir que nous commentons développent une remarque de Desanti notant qu'on ne peut « (...) éliminer du concept d'infini les zones d'ombre que ne manque jamais d'y projeter la représentation spontanée qu'un mathématicien produit du champ où ses propres actes s'enchaînent et se reproduisent », *La philosophie silencieuse*, *ou critique des philosophies de la science*, Éditions du Seuil, Paris, 1975, p. 282.

[3] M. Richir, *Recherches phénoménologiques IV et V*, p. 13, *op.cit.*

[4] *Ibid.*, p. 14.

(ou dans une restriction de lui-même). L'application « successeur » qui à tout élément a de N associe un élément b de N est alors définie à travers des propriétés générales : 1) à deux éléments distincts, elle associe toujours deux images également distinctes, 2) tout élément n'est pas un successeur : en d'autres termes, si 'Ω(N) appartient à N, la réciproque n'est pas juste, 3) il existe ainsi un et un seul élément de N, appelé 1[1,] qui n'appartient pas à 'Ω(N), *qui donc n'est successeur de personne*. La question est évidement de savoir si de telles propriétés générales, qui sont celles du successeur, permettent vraiment de le *définir*. Notons enfin que le 1 joue un rôle particulier dans cette démarche, puisqu'il est le seul élément de l'ensemble à être *singularisé*.

Cette définition sur l'ensemble N le caractérise donc (selon une définition provenant des *Paradoxes de l'infini* de Bolzano) comme un ensemble infini, sans qu'il soit pour autant homogène à l'arithmétique des entiers naturels telle qu'elle est connue. L'infinité de l'ensemble obtenu peut être « plus grande » que celle de l'arithmétique ; en d'autres termes, l'ensemble ainsi défini peut contenir les éléments de N et d'autres éléments[2] : il faut donc rajouter une définition supplémentaire pour extraire de l'ensemble infini obtenu l'ensemble « simplement infini » N. En d'autres termes encore, les opérations fondamentales isolées par Dedekind (l'application en soi-même et la loi de successivité) *n'engendrent pas elles seules directement la suite N puisqu'on peut construire une infinité d'ensembles contenant la suite N et d'autres éléments qui sont susceptibles d'une application sur une partie d'eux-mêmes*. La suite N ne peut être obtenue qu'à travers l'élimination des éléments parasites ; elle est en effet le plus petit ensemble possible susceptible d'être appliqué sur une de ses parties. *Mais c'est précisément ce point qui posera problème* : les différents infinis que Dedekind doit réduire n'ont de sens à ce point qu'à partir de l'idée, déjà déterminée, de la série des entiers naturels à partir de laquelle on peut les construire. Ils ne sont pas *a priori* impliqués par la définition de Dedekind ; plus exactement, ils ne le sont pas d'un point de vue transcendantal, car le lien avec une série infinie quelconque n'est pas *a priori* donné dans l'axiomatique construite qui ne produit pas spontanément une infinité, qui doit elle-même être posée comme telle. L'esprit doit en quelque sorte pré-déterminer les éléments qu'il déploie dans un horizon qui les rende commensurables avec l'arithmétique pour se donner les moyens de raisonner sur eux. Ainsi la démonstration de Dedekind s'avère transcendantalement circulaire. Dedekind a en effet d'avance en vue la suite N, et c'est par rapport à elle qu'il conçoit d'abord les éléments parasites qu'il s'efforce ensuite d'éliminer. La « pluralisation des infinis » présuppose en quelque sorte l'horizon d'une série déjà individuée d'éléments donnés dans un ensemble. En d'autres termes, en toute rigueur, la définition logique « application d'un ensemble sur une de ses parties » ne produit pas à proprement parler de concept positif de l'infini, car elle est, en elle-même, indépendante de toute définition ou individuation d'éléments. D'un point de vue phénoménologique et cognitif, on ne peut donc effectuer aucune opération, aucune démonstration à partir d'elle sans anticiper, donc co-poser, un horizon d'entités déjà individuées, dotées d'une certaine structure.

« (...) si l'on ne savait toujours déjà reconnaître a posteriori ce qui est censé constituer le nombre (ordinal) a priori, nous ne disposerions d'aucun moyen pour distinguer entre les éléments n (les nombres) des éléments t parasites.[3] »

Il faut faire *a priori* la distinction entre le système simplement infini et l'infini quelconque pour échapper à la prolifération de l'infini[1]. Dedekind présuppose ainsi « l'existence »

---

[1] Il s'agit ici du 1 formel et non du 1 de l'arithmétique usuelle.
[2] *Ibid.,* p. 19 - 20.
[3] M. Richir, *Recherches phénoménologiques IV et V*, p. 20, *op.cit.*

d'une multiplicité déjà individuée d'éléments sur lesquels opérer des raisonnements alors qu'à ce point, elle n'est encore qu'une *pluralité* qui peut s'individuer de façons diverses selon la structure axiomatique qu'on lui impose. L'ensemble ne préexiste pas à la loi de structure qu'on lui donne. Peut-on finalement, demande Richir, présupposer l'individuation des éléments d'un ensemble infini sans se rapporter implicitement à celle de la suite N ? Ne faut-il pas disposer à l'avance d'une suite d'éléments déterminés pour générer à partir d'elle d'autres suites possibles possédant des structures similaires, et permettant de la mettre elle-même en question ?

Le 1 abstraitement défini, dont nous avons souligné le rôle central, porte l'ombre du « 1 » arithmétique ; il n'est pas seulement élément singulier abstrait de l'ensemble, mais élément jouant implicitement comme unité puisqu'il permet d'individuer des ensembles sur lesquels on peut *chaque fois* raisonner. La définition « chaîne contenant l'élément fondamental » produit en effet un ensemble sur lequel on peut raisonner, puisque la démonstration en présuppose à la fois « plusieurs » de façon à ce qu'il soit possible de définir l'intersection de cette pluralité de chaînes. Or, poser « des chaînes » vérifiant les axiomes donnés, c'est déjà, écrit Richir, présupposer leur individuation formelle ; en d'autres termes, *c'est déjà présupposer la structure métaphysique (transcendantale) du nombre*, même si ses caractères formels ne sont pas encore déterminés. Du point de vue transcendantal, l'individuation d'une quelconque multiplicité, donc d'un ensemble constitué d'individus bien distincts, est-elle possible autrement que par la médiation de l'individuation pourtant indéfinie des nombres comme éléments justement indistincts ? Le concept d'ensemble lui-même est-il possible sans cette médiation alors que chez Frege ou Dedekind, la théorie des nombres présuppose le concept même d'ensemble ? L'antériorité est ici phénoménologique-transcendantale : la pensée peut-être accéder à un concept d'ensemble sur lequel elle puisse raisonner sans posséder le schème du nombre à partir duquel elle peut conformer cette idée d'ensemble au rôle qu'elle veut lui faire jouer dans ses démonstrations.

Le cercle obtenu provient d'un présupposé fort de Dedekind : celui de l'existence *a priori* d'infinis individués dont la construction logique ne fait alors que donner des exemples. La démonstration « transcendantale » dedekindienne de « l'existence « de l'infini» »[2] est exemplaire car elle explicite parfaitement le court-circuit transcendantal qui habite l'ensemble de sa démarche. Dedekind prend en effet comme point de départ le monde des objets de pensée, et entend montrer que celui-ci est infini, dans la mesure où toute pensée peut elle-même être prise comme objet de pensée. Or, on ne peut pas, dit Richir, poser l'ensemble de toute chose qui peut être objet de ma pensée (ou de mon penser) *a priori* puisqu'une chose ne s'avère effectivement faire partie de cet « ensemble » que du moment où elle est précisément pensée. En d'autres termes, un tel ensemble n'est selon Richir qu'*une illusion projetée depuis l'actualité de la pensée, construite à partir d'elle et compréhensible à partir d'elle seulement*. Un axiome ou une définition ne peut donc que sous l'effet d'une illusion « produire » une semblable totalité : il y a chez Dedekind confusion du potentiel avec de l'individué, et le potentiel n'est pas un ensemble d'individus non encore exprimé,

---

[1] Comme le rappelle Richir « (...) en toute rigueur logique, si l'on prend les propriétés fondamentales pour des axiomes (les axiomes de Dedekind – Peano) et si on les définit dans un langage logique formel en même temps que le concept de modèle pour le système formel ainsi constitué, la conception de Dedekind ne suffit pas pour éliminer les modèles non-standards (non- réguliers), ainsi que l'avaient déjà montré les résultats bien connus de Skolem et Henkin (…), *Ibid.*, p. 20.

[2] Comme le rappelle Desanti (*La philosophie silencieuse*, p. 282, 283, Paris : Seuil, 1975), Dedekind propose comme définition de l'infini la propriété qui selon Bolzano constitue l'un de ses paradoxes. La démonstration de l'existence d'infini qu'il propose est elle aussi influencée par Bolzano, qui fait lui appel à la totalité des propositions pour ce faire.

mais l'ouverture d'un champ d'individuations potentielles, mais dont l'individuation suppose une transposition, une véritable création[1].

Ajoutons – c'est là que le phénoménologique se laisse entr'apercevoir – que s'il n'est pas possible de penser le potentiel comme une totalité, parce que celui-ci ne cesse en quelque sorte de se déborder lui-même[2], la question du passage à l'individuation n'est cependant pas seulement formelle, dans la mesure où l'individualité est elle-même un « schème » et non une simple catégorie logique. Il y a donc, en deçà de la logique formelle de l'individuation[3], une logique transcendantale du schème de l'individuation. Richir parle à ce sujet d'une individuation relative, rythmique, toujours habitée d'un part d'indéfinition, au sein de ce qu'il désigne comme *rythme même de la répétition se répétant.* Il y a ainsi une difficulté profonde pour la pensée lorsqu'elle cherche à décrire ses propres conditions d'exercice et ses propres lois de fonctionnement, puisqu'il s'agit toujours alors de « donner à la pensée l'illusion de penser avant d'être pensée ». Dès lors, *le concept de totalité est une illusion transcendantale de la pensée et cette illusion est phénoménologique* : il s'agit, note Richir, de la pensée *aux prises avec son propre phénomène*.

« (...) comme si, donc, en se phénoménalisant à elle-même dans un rythme transcendantal, la pensée ne pouvait s'empêcher de projeter l'ombre de ce rythme dans une structure abstraite et de créer par là un effet d'horizon nécessaire à son exercice même en régime mathématique (...)[4] »

Les remarques les plus riches de Richir sont faites dans le paragraphe conclusif de son étude, « *Les problèmes de la suite N infinie et les fondations transcendantales de l'arithmétique* ». En écho à Dedekind, Richir souligne que ce sont les *relations* qui constituent l'objet de l'arithmétique, mais il précise qu'il s'agit de penser le caractère *phénoménal* de ces relations[5]. La relation se traduit du point de vue phénoménologique-transcendantal par la mise en évidence du *schème transcendantal de la répétition*, que Richir décrit également comme le

[1] En apparence ici, Richir répète la critique que Frege puis Russel, ont fait du langage logique. Les paradoxes surgissent en projetant une ontologie implicite qui n'est que l'ombre de ce qu'il s'agit de définir conventionnellement ; certains raisonnements conduisent à des paradoxes parce qu'ils ne sont pas des raisonnements au sens strict, parce qu'on ne peut en toute rigueur pas les écrire dans une langue formelle. C'est la maîtrise sémantique et syntaxique du démontrable qui permet de lever les paradoxes. Pour autant, la remarque de Richir est extrêmement forte : la pensée, montre Richir, doit être constituée comme pensée logique pour être accessible au langage logique. La révolution ensembliste, le tournant syntaxico-sémantique de la logique, ont des causes phénoménologiques profondes et permettent la distinction nette du registre architectonique du langage, qui ne mobilise de pensée que mouvante et fluide, et du registre architectonique de la langue, des formalismes, qui actualisent ce qui leur apparaît comme potentialité et qu'ils accueillent dans les réseaux qu'ils agencent. Ainsi, le tournant sémantico-syntaxique des mathématiques est aussi en quelque sorte un tournant herméneutique : l'institution des langages formels doit elle-même répercuter la créativité de la sphère du sens se faisant, nourrir une véritable dynamique, et non se comprendre comme fondation définitive et figée.

[2] D'où, on ne peut, partant de rien, se donner comme Leibniz tous les possibles et raisonner sur eux ; le possible s'incarne à partir d'une actualisation au moins potentielle au sein de laquelle il indique une potentialité de dépassement.

[3] Zermelo montrera qu'on ne peut individuer ainsi les éléments de multiplicités de cardinal supérieur à N, comme R (cf. aussi un peu plus loin).

[4] M. Richir, *Recherches phénoménologiques IV et V,* p. 103-104, *op.cit.*

[5] M. Richir, « Si donc il y a, dans la pensée arithmétique, rencontre de celle-ci avec le champ de sa propre phénoménalité, il faut que, contrairement à ce que l'on croit généralement et que l'on pourrait croire de prime abord, *il y ait phénoménalité de ces relations*, donc que ces relations puissent être *objet d'intuitions*. », *Ibid.,* p. 102.

rythme de la répétition[1]. De la sorte, explique Richir, Les termes d'une multiplicité ne sont pas indifférents mais ne s'individuent que par des rapports mutuels, par ce qui, au niveau formel-logique, est *interprété* comme l'élaboration symbolique et la mise en lois de ces rythmes. En définitive, « le nombre comme schème transcendantal n'est rien d'autre que le rythme même de l'individuation, réfléchi comme tel.[2] ».

La longue étude que Richir consacre par ailleurs à la tentative de fondation frégéenne de l'arithmétique entend préciser cette question ; Frege, écrit Richir, s'avère à ce sujet d'une subtilité remarquable dans la mesure où il s'efforce de faire accéder au formel le « mouvement même » de l'individuation. En effet, par la définition préliminaire du 0 comme la classe d'équinuméricité[3] du concept « non identique à soi », il institue selon Richir quelque chose comme *une problématique de l'identité à soi de la non-identité à soi.* Il repère par là le cœur de l'aporie transcendantale du nombre, même s'il n'en identifie pas le caractère transcendantal. Richir s'attache ici à mettre en évidence une double difficulté, aperçue par Frege. De quelle façon peut-on, à partir de la définition de la succession (y succède à x), individuer une suite. Le problème est que le successeur est toujours défini à partir de celui dont il est le successeur, *que leur individuation réciproque n'est donc que relationnelle et ne conduit en toute rigueur qu'à un enchaînement répété de successions dont il n'est pas possible de saisir la différence réciproque*. Frege définit tout nombre comme le cardinal de la série des nombres qui le précèdent ; mais la définition donnée *n'est en elle-même pas directement cardinale*, ou plutôt ne prend une dimension cardinale *qu'à condition de définir une hérédité sur la suite* : le successeur n'est cardinal que si le prédécesseur est un cardinal, mais le sens de cette cardinalité n'est jamais donné. L'hérédité n'a alors de sens que par un coup de force à partir de la définition de *l'ensemble vide* et de l'unité qui lui est associée et opposée : le passage du 1, dans son opposition formelle au 0, au 1 comme *unité* est en lui-même *indéductible*. L'opposition du 1 au 0 ne peut en effet être assimilée au passage du 1 au 2, celle-ci impliquant une *mutation du sens du 1 qui seule lui confère son caractère arithmétique*.

c. L'antinomie du transfini[4]

Richir consacre deux articles à la théorie cantorienne des ensembles, en analysant, dans le premier, les « *a priori* » qui mènent le raisonnement de la *diagonale* (et dans le second, la façon dont Cantor appréhende la classe des cardinaux des *alephs* comme une classe bien ordonné)[5]. Par les effets de rythme, d'excès, d'horizon qu'elle met en jeu, la théorie cantorienne est en effet un terrain idéal pour « l'épistémologie phénoménologique » de

---

1 M. Richir, « Le fondement transcendantal de la relation est donc pour nous le rythme comme schème transcendantal, et c'est ce rythme qui est, pour ainsi dire, créateur des termes mêmes qui sont mis en relation. », *Ibid.*, p. 102.

2 *Ibid.,* p. 104. Position que Richir reformule dans ses écrits plus récents « (...) toute pluralité indéterminée se transpose architectoniquement, par déformation cohérente, en *multiplicité* dont l'individuation effectuée de l'un de ses éléments implique (intentionnellement) l'individuation potentielle de ce qui est dès lors transposé de la pluralité, comme élément potentiel de la multiplicité, *Phénoménologie en esquisses*, p. 508, *op.cit.*

3 Frege caractérise le nombre en deux étapes. Il définit dans un premier temps le concept de « classes d'équinuméricité » caractérisant des ensembles, pour dans un deuxième temps, poser le nombre, dans une réflexion conceptuelle de second niveau, comme le concept de ces classes elles-mêmes, comme la caractérisation conceptuelle *de ce en quoi* elles présentent un caractère commun.

4 On pourra sur ce point s'intéresser à l'article de Laszlo Tengelyi qui met de façon très précise en parallèle le raisonnement de Richir et son inspiration kantienne, « Nombre transfini et apparence transcendantale : Richir sur Kant et Cantor, *L'expérience retrouvée*, Pari, L'Harmattan, 2006.

5 M. Richir, « Une antinomie quasi-kantienne dans la fondation cantorienne de la théorie des ensembles », *Études phénoménologiques, Phénoménologie et sciences exactes* (1986, n° 3).

Richir[1]. L'objectif de Richir est de formuler une antinomie de caractère kantien opérant, de façon cachée, au sein de la démarche de Cantor[2]. Cette antinomie n'est pas seulement kantienne par analogie : le projet, explicitement annoncé, est en vérité de reformuler globalement l'antinomie kantienne de l'infini, en montrant que celle-ci n'est pas d'abord de caractère cosmologique, mais de caractère proto-arithmétique, et qu'elle n'est finalement rigoureusement constructible qu'à partir d'une analyse de la structure du champ phénoménologique[3].

L'intérêt vient d'abord de la façon dont Richir envisage le raisonnement cantorien, la double contrainte qui s'y manifeste. La définition de tous les sous-ensembles P(E) telle que V puisse aussi être posé implique en effet l'actualité absolue de P(E). L'ensemble V est d'une part un sous-ensemble compris par définition dans P(E) et d'autre part un ensemble *posé une fois et une fois seulement* la position de P(E) faite. La définition de V n'est pas en effet une définition qu'on puisse poser individuellement en individuant en même temps que P(E) un de ses sous-ensembles. Elle présuppose ainsi une actualité ; or précisément, l'analyse phénoménologique va montrer que toute position d'un infini « comme actuel » s'accompagne aussitôt du débordement d'un infini « plus grand » à partir duquel seulement le premier peut-être actuel. Ici, Richir ne fait qu'expliciter les fondements transcendantaux d'une critique formulée depuis longtemps par Zermelo. On ne peut, écrit-il, considérer une multiplicité inconsistante, inconstructible par quelque procédé *a priori* que ce soit, et dire *a priori* qu'elle contient ou non un type d'éléments qu'on chercherait à en extraire ; on ne peut, une fois encore, raisonner sur les individus d'un ensemble lorsque aucun critère d'individuation n'est donné. Le raisonnement de Cantor implique ainsi deux positions contradictoires. Pour raisonner sur l'infini comme sur un objet, il faut le poser comme est un *inconditionné absolu a priori* disponible (thèse). Cependant, le raisonnement conduit de lui-même à ne le poser que comme un conditionné plongé dans un inconditionné de niveau supérieur, car c'est par ce moyen seulement que des critères de son infinité peuvent être possédés par le raisonnement. Le concept de totalité ne peut, sans contradiction, s'appliquer à l'infini et change de sens au cours du raisonnement : « (...) la totalité n'est jamais que *relative*, toujours appelée à être rouverte, et ce, simplement *parce que l'individuation de ses éléments ne peut jamais être considérée*

1 Desanti notait déjà les similarités problématiques entre les questions liées à la fondation de l'arithmétique et les paradoxes de l'infini. Dans l' « Appendice I, Fondements des mathématiques », p. 241 et suivantes, il notait que la définition cantorienne des cardinaux est, pour l'essentiel, dans un autre langage, équivalente à la définition du concept de nombre proposé par Frege (p. 252). Plus loin, il notait que « Si nous considérons une échelle finie de puissance, (...) il nous est difficile d'écrire N1>N0 sans considérer l'ensemble d'N1 comme une totalité achevée, pour laquelle prend tout son sens l'expression « infini actuel. » (*La philosophie silencieuse, ou critique des philosophies de la science*, « Appendice II, Infini Mathématique, III. Cantor et le transfini », p. 282.).

2 M. Richir, « Notre objet est en effet de montrer, ici, que la première antinomie de la Raison pure n'est pas tant, dans ses profondeurs, une antinomie qui concerne la cosmologie qu'une antinomie qui concerne l'infini (l'infiniment grand) actuel. Nous allons le voir en construisant une antinomie « quasi-kantienne », de même structure, à propos de la tentative cantorienne (qui a échoué) de fonder mathématiquement le *continu arithmétique* », « Une antinomie quasi-kantienne dans la fondation cantorienne de la théorie des ensembles », p. 85.

3 Pour formuler l'antinomie, Richir généralise implicitement le résultat que Cantor ne cherchait d'abord à démontrer que sur N et sur R La démonstration de Cantor se fait par l'absurde. Supposons, dit Cantor, que P(E) et E soient de même puissance, supposons autrement dit qu'on puisse établir une application bijective de E sur p(E), associant donc à chaque élément de E un sous-ensemble de E. Cette application A posée, on peut alors définir l'ensemble V des éléments de E tels que tout A appartient à V si et seulement si il n'appartient pas au sous-ensemble qui lui est associé. Quel est alors le statut de V : s'il contient l'élément auquel il est associé, celui-ci est donc associé à un ensemble qui ne le contient pas, donc il n'est pas dans V. S'il n'est pas dans V, alors, il est dans V : contradiction.

comme achevée ou absolue.[1]» En d'autres termes, les nombres transfinis sont « l'effet » de la position de l'infini comme totalité actuelle, aussitôt débordée d'elle-même et ne pouvant apparaître comme telle que plongée dans un infini plus grand. On ne peut établir aucune actualisation du potentiel qui ne cesse, non par simple effet de construction mais de par la structure originairement inchoative et mobile du champ phénoménologique, de déborder toute tentative de l'instituer comme totalité. De la sorte, le nombre transfini est en fait pourvu d'une *apparence transcendantale* qu'il ne peut supprimer. Richir définit la théorie des nombres transfinis comme « *arithmétique de l'apparence transcendantale*[2] » : les infinis s'obtiennent par une sorte d'auto-action successive sur eux-mêmes, que cela se fasse positivement ou négativement lorsqu'on définit, d'une manière ou d'une autre, l'étape que les moyens jusqu'alors disponibles ne permettent pas d'atteindre par « ressources internes de l'infini». Les infinis sont d'une certaine façon caractérisés du moment qu'on les outrepasse ; le mouvement semble impossible à stabiliser puisque la position d'un infini plus grand semble aussitôt dévoiler les ressources de son propre dépassement.

d. Remarques complementaires

Intéressons-nous enfin, dans le fil des considérations richiriennes, à la façon dont le phénoménologique et le symbolique s'entretissent dans l'institution de classes d'ordinaux[3] et de cardinaux. On se contentera ici de quelques brèves remarques, le but n'étant, là encore, que d'isoler une structure phénoménologique d'excès et de montrer comment celle-ci est symboliquement exploitée comme ouverture réflexivement maîtrisée d'un système symbolique à ce qui l'outrepasse pour son enrichissement et sa complexification.

Comme on le sait, il est possible, en traversant des propriétés de plus en plus compliquées, d'introduire différentes classes d'ordinaux (qui finissent cependant chaque fois par « se rejoindre elles-mêmes », en quelque sorte, par ne plus avoir les moyens de « contenir » la puissance d'excès que la part réfléchie de leur infinité porte encore). L'antinomie se convertit ainsi, comme Richir le note lui-même, en méthode, et celle-ci prend la forme d'une *dialectique*. L'infini, en d'autres termes, agit dans le processus de construction comme un aiguillon dialectique : il s'agit progressivement de construire des propriétés capables de capter ce que les structures antérieures semblent laisser indéterminées, d'avérer, d'une certaine façon, les limites internes d'un formalisme en s'appuyant sur lui-même pour définir ce qui l'outrepasse. Ce qu'il faut bien noter, c'est *il n'y a pas de monotonie dans la structure des excès successifs*. Chaque nouvelle définition arrache à ce que la précédente laissait indéterminé le principe d'un nouvel ordinal outrepassant

1 *Ibid.,* p. 112.

2 *Ibid.,* p. 112.

3 Rappelons que si on pose la série infinie comme 1, 2, n, $\acute{\omega}$, ($\acute{\omega}$ est le signe conventionnel de l'infini arithmétique simple) on peut écrire aussi cette série 2, n, $\acute{\omega}$, 1, ce qui revient à écrire 1, n, $\acute{\omega}$, 1, les deux séries pouvant êtres reliées par une application terme à terme. La série obtenue est de même cardinal que la première (elle ne procède que de son ré-arrangement) mais est en revanche ordinalement différente. On peut, en reproduisant le processus, construire les séries 1, n, $\acute{\omega}$, 1, 2, puis, 1, n, $\acute{\omega}$, 1, 2 et obtenir ainsi l'ordinal 1, n, $\acute{\omega}$, 1, n, $\acute{\omega}$, que l'on écrit $2\acute{\omega}$. L'opération peut être reproduite, et reproduite, et l'on obtient successivement les ordinaux $3\acute{\omega}$, $4\acute{\omega}$, jusqu'à, par nouveau passage à l'infini sur le premier infini, l'ordinal $\acute{\omega}^2$. De la même façon, on peut réordonner une infinité de $\acute{\omega}^2$ pour obtenir $\acute{\omega}^3$, $\acute{\omega}^4$, jusqu'à $\acute{\omega}^{\acute{\omega}}$... Processus qui continue, puisqu'en réordonnant, on peut continuer en obtenant $\acute{\omega}^{\acute{\omega}+1}$, $\acute{\omega}^{\acute{\omega}+2}$, $\acute{\omega}^{2\acute{\omega}}$, $\acute{\omega}^{3\acute{\omega}}$, et ainsi de suite puisque le principe d'exponentiation peut lui-même être poursuivi à l'infini. On pose alors ξ_0 comme le premier ordinal « plus grand » que toutes les tours d'exponentielles sur $\acute{\omega}$. On pourra alors reparcourir toute la série pour obtenir ξ_{0+1}, ξ_{01}, ξ_{03}, $\xi_{0\acute{\omega}}$, pour obtenir $\xi_{0\xi 0}$, et par le même principe d'outrepassement, définir ξ_1. On pourra continuer ainsi ξ_2, ξ_3, ξ_4, $\xi_{\acute{\omega}}$, $\xi_{\xi\theta}$, ξ_{ξ} et ainsi de suite.

ceux qui le précèdent et introduit une plus grande complexité structurelle des objets créés. Les lois d'engendrement d'ordinaux à partir d'ordinaux plus petits forment ainsi un ensemble structuré ; on peut en quelque sorte parler d'une sorte de conflagration de l'infini sur lui-même, puisque, chaque fois, la « puissance » d'infinité contenue dans un registre symbolique est appliquée sur elle-même par attraction de la virtualité d'infini que ce registre ne possède pas, mais du même mouvement, à son tour limitée et ouverte à un autre mode de déplacement par changement du cadre de saisie. La même structure d'excès se produit au sein des cardinaux ; une fois admis la possibilité d'en ordonner la série (ce qui est un *choix* théorique), on peut déterminer, comme on l'a déjà fait sur les ordinaux, des règles de calcul sur les cardinaux, puis établir des séries successives de cardinaux. Par la construction d'opérations[1] similaires à celle procédés sur les ordinaux, qu'un cardinal pourra être défini comme régulier (accessible à partir d'une série définie sur une de ses parties), singulier (c'est-à-dire tel que toute série définie sur une partie plus petite que lui est nécessairement de cardinalité plus petite que la sienne), etc.[2].

Notons cependant qu'il ne s'agit pas ici d'une libre création, que la domestication de la prolifération de l'infini implique une véritable morphologie de l'auto-application de l'infini sur lui-même : la perspective richirienne maintient les réquisits husserliens ou desantiens de concevoir un enchaînement réglé d'actes dans des horizons de champs structurés. La succession des ordinaux construits à partir de ὠ explore ainsi le pouvoir du formalisme initial. La formulation de la « tour » permet par définition de poser un ordinal supérieur à tout ordinal s'écrivant sous la forme précédemment donnée. Le passage à la limite n'est donc ici qu'épuisement des possibilités d'une écriture « directe » par une méta-écriture. C'est, en quelque sorte, avec la récurrence du processus de dépassement « scriptural » que l'idée d'un ensemble ou d'une classe complète d'ordinaux constructibles par n'importe quel moyen à partir des opérations données prend un sens plein. L'exploration systématique du « pouvoir » d'un formalisme donné à un certain niveau donne donc seule un sens « maîtrisable » aux positions d'objets inaccessibles par ce formalisme, en permettant de ne pas poser celles-ci « dans le vide » mais dans l'horizon d'un champ déjà structuré. Les excès (les nouveaux types d'ordinaux, de cardinaux, etc.) ne se construisent alors à chaque fois qu'en compliquant une structure théorique déjà donnée, par une forme d'auto-réflexion du formalisme utilisé pour les définir. Ces formalismes sont, à leur tour, transposables par modifications des hypothèses de départ, conduisant à ce que sous certaines conditions des objets théoriques très différents sous d'autres soient identiques. En cela, *la prolifération des infinis est malgré tout limitée par la complexité théorique des objets*. La série des cardinaux est en quelque sorte en équilibre entre le formalisme vide et l'infini absolu qu'elle voudrait indiquer. Les axiomes qu'il faut chaque fois ajouter le sont ainsi en fonction de la consistance globale de la théorie – consistance qui n'est plus seulement une consistance logique mais la « préservation et la transmission de propriétés fondatrices à travers certaines transformations structurelles (comme le Forcing de Cohen, etc.) définies sur elle.

---

[1]La définition d'opérations équivalentes aux opérations définies sur des cardinaux plus petits conduit à concevoir des *classes d'opérations*.

[2] On pose alors les *cardinaux inaccessibles* (qui ne peuvent plus être obtenus d'aucune façon, *même par leur inaccessibilité,* à partir des cardinaux plus petits, etc., puis définit d'autres types de cardinaux encore, Malho, Mesurables, Compacts, Woodin, etc.) Pour une étude plus approfondie des théoriesmathématiques, on lira le bel article d'Albino Lanciani, « Infini mathématique et infini absolu », *Annales de Phénoménologie n° 5/2006*.

Conclusion

La phénoménologie des mathématiques richienne s'avance dans deux directions. Elle permet d'ancrer l'activité mathématique dans une symbolicité elle-même liée à l'expéreince phénoménologique. Du même coup, elle aide à comprendre le statut singulier de cette symbolique- à la fois par sa capacité à « maîtriser sa propore prolifération », et par sa tension vers des concepts qui renvoie aux énigmes premières du champ phénoménologique : l'institution de l'unité à partir du rythme de la « répétition se répétant », l'ouverture sur l'infini par transposition de l'indétermination du phénomène en concept positif – quoique toujours dès lors incomplet. De cette façon s'éclaircit également le rapport des mathématiques au transcendantal par le processus d'auto-réflexion qui conduit celles-ci à épurer leur appréhension de ces « substructures » jusqu'à se les donner conceptuellement comme « pures énigmes », « pures puissances de penser et de pensabilité ». Les mathématiques travaillent à la converson de la tension transcendantale qui les habite en une double tension *dialectique* et *herméneutique* exprimant la puissance d'une réflexivité maîtrisée mais ouverte à ce qui la déborde.