AL-MUKHATABAT N° 05 ANNEE 2/ 2013 ISSN : 1737-6432

LA LOGIQUE LINEAIRE ET LA QUESTION DES FONDEMENTS DES LOIS LOGIQUES[23]

1ère partie

Alain Lecomte
(Université Paris 8 - Vincennes-Saint-Denis & CNRS ``Structures Formelles du Langage")

Résumé

La rencontre de la logique et de l'informatique théorique, dès les années soixante, a provoqué un profond changement dans la manière dont aujourd'hui nous pouvons concevoir la logique. Il semble que les philosophes n'aient pas tous mesuré l'ampleur d'un tel bouleversement. Cet article essaie de montrer que la pensée logique aux confins du calculatoire permet de renouveler une question aussi fondamentale pour la philosophie que l'est celle du fondement des lois logiques. En chemin, il essaie aussi de montrer comment cette réflexion renouvelle la problématique du langage.

ملخّص.

إنجرّ منذ الستينات عن اندماج المنطق بالإعلامية النظرية تغيير عميق في الكيفية التي يمكن أن نتصوّر بها المنطق اليوم. و يبدو أن الفلاسفة لم يدركوا بصورة جيّدة مدى هذا التحوّل. و سيحاول هذا المقال تبيان كيف أن التفكير المنطقي بأبعاده الحسابية يسمح بإثارة مسألة أساسية بالنسبة إلى الفلسفة و هي مسألة أساس القوانين المنطقية. و يحاول أيضا من خلال ذلك تبيان كيف أنّ هذه المقاربة تعطي نفسا جديدا لإشكالية اللّغة.

[23] Cet article est écrit dans le cadre du projet ANR-LOCI et a bénéficié des nombreuses remarques et discussions induites par ses membres, dont en particulier Marie-Renée Fleury, Christophe Fouqueré, Jean-Baptiste Joinet, Myriam Quatrini, Christian Retoré et Samuel Tronçon. Il a aussi bénéficié de discussions d'autres chercheurs, notamment à l'occasion du colloque *Games, Game Theory and Games Semantics*, organisé à Riga du 18 au 21 mai 2012 par Jurgis Skilters et ses collègues. Merci à lui mais aussi à Mathieu Marion, Helge Rückert et Gabriel Sandu.

Abstract

The meeting of logic and theoretical computer science, since the sixties, has caused a profound change in the way today we can see logic. It seems that all philosophers have not measured the magnitude of such an upheaval. This article tries to show that the reflection on logic from the computation side allows to renew an issue for philosophy as fundamental as the problem of the foundation of logical laws. In passing, it also tries to show how the questions of language can be renewed from this perspective.

1 Introduction

La question des fondements des lois logiques intervient de façon récurrente dans le débat philosophique. Tantôt renvoyée à la psychologie, c'est-à-dire à l'organisation du cerveau, tantôt à la métaphysique sous l'aspect de normes transcendantales, cette question ne saurait avancer tant qu'on en reste à un niveau d'analyse superficiel de la logique qui se limite aux lois apparentes du discours telles qu'elles nous sont parvenues depuis les premiers logiciens antiques via la tradition médiévale. En en restant là, en effet, on fait l'impasse sur les très sérieux approfondissements apportés par la recherche contemporaine aux confins des lois et du calcul. Si ceux-ci, certes, trouvent leur origine chez les grands du début du vingtième siècle comme Frege, Russell ou encore Tarski, ils prennent une importance particulière avec le surgissement de l'informatique et les questions que celle-ci pose à la science logique. On assiste alors à un changement de perspective sur les problèmes. Peu à peu l'impératif de contrôle du discours mathématique, scientifique et plus généralement argumentatif s'estompe au profit de la recherche de méthodes sûres visant à ce que des processus de calcul automatisé s'exécutent de manière correcte. En recherchant ce qu'il peut y avoir de commun entre des preuves et des programmes, des chercheurs comme W. A. Howard et N. J. de Bruijn, continuant des travaux de H. Curry et W. Tait, ont dégagé la dimension procédurale de certaines logiques (principalement au départ la logique intuitionniste). Dans les années quatre-vingt, le logicien français Jean-Yves Girard a généralisé ces travaux en mettant à jour l'importance particulière en logique des règles structurelles, ouvrant la voie à la logique linéaire puis aux théories plus récentes qui lui ont succédé : ludique et géométrie de l'interaction.

Le présent article se développe en quatre temps. Le premier (isomorphisme de

Curry-Howard) s'attache à mettre en évidence le contenu procédural de la logique intuitionniste et montre qu'une première réponse peut être donnée à la question des fondements à partir de lui. Les déductions s'apparentent à des fonctions (ou morphismes) et la loi du *modus ponens* n'est rien d'autre que le processus d'application d'une fonction à son argument. En passant de la logique intuitionniste à la logique linéaire, on déplace les lois d'un espace de formules à un lieu de ressources permettant d'expliquer entre autres choses les ressorts de l'action: les lois logiques s'enracinent alors dans celles de la nature. On ne peut passer d'un état physique à un autre qu'au moyen d'une transition, qui prend la forme symbolique d'une implication dite ``linéaire'' grâce à laquelle l'état initial est consommé pour laisser place à un état final. Mais la logique linéaire dévoile en même temps une autre possibilité de fondation, bien plus riche. Elle permet en effet l'invention de la notion de *réseau de preuve*, sorte de graphe dont les noeuds sont des formules et dont les arcs sont des traductions de lien « connecteurs » entre elles, ou des liens « axiomes », ou encore des liens « coupures », graphe qui, pour représenter une preuve, doit satisfaire certain critère de correction. Ainsi géométrisée, la logique se traduit par des réseaux que contraignent des impératifs d'absence de cycle que l'on peut clairement associer à des exigences de terminaison calculatoire. On peut alors, à ce stade, inverser la démarche traditionnelle, qui part d'un langage et de la formulation de règles de déduction avant d'arriver à des critères de décidabilité, en mettant en premier ces critères, sous la forme de contraintes dans des réseaux qui finissent par déterminer un langage (avec ses lois) comme étant le seul possible. Ceci est le troisième temps: autrement dit de la géométrisation. Un quatrième temps dépassera cette vision en allant vers du plus abstrait encore. La normalisation des preuves devient le paradigme obligatoire dans lequel doit s'inscrire la logique, mais ce n'est plus seulement la normalisation d'une preuve (l'élimination de ses « détours »), c'est celle d'une interaction qui peut avoir lieu entre une preuve et sa contre-preuve. On atteint alors une figure très générale, celle de l'interaction entre des processus, deux d'entre eux étant dits orthogonaux si leur processus de normalisation « se termine bien » (c'est-à-dire par un « dessin » résiduel qui consiste dans le simple endossement par l'un du mouvement fait par l'autre). Au terme de ce périple, qui nous fera ainsi passer tour à tour par les notions applicatives, la notion d'action et la géométrisation des processus, nous atteindrons les structures fondamentales de l'interaction comme origine possible du langage logique.

En cours de trajet, nous aurons à plusieurs reprises l'occasion de nous arrêter sur quelques retombées philosophiques, à nos yeux importantes, des approches, méthodes et concepts développés ici. Comme on peut s'y attendre, ces retombées concerneront principalement la philosophie du langage. Si, au départ, ce sont les propriétés d'un langage logique qui nous servent de base, nous aurons plus d'une fois l'occasion de nous interroger sur leur proximité avec celles du langage en général.

2 Une « découverte » en logique

Les dernières décennies ont apporté une révolution authentique en logique, que bon nombre de philosophes ont choisi d'ignorer. Il ne s'agirait selon eux que de choses techniques, uniquement en rapport avec l'informatique. Or, ces découvertes ont bouleversé notre conception de la logique pour longtemps, et de telle sorte que toute réflexion s'inscrivant dans le champ logique et qui les ignorerait se retrouverait de ce fait même disqualifiée. La première de ces découvertes a été le fameux « isomorphisme de Curry-Howard », à savoir une correspondance entre les preuves et les programmes, les formules et les types, les règles logiques et les règles de calcul, qui est bien plus qu'une simple «correspondance » puisqu'on peut établir une réelle association de structures, autrement dit parfaitement ce que l'on nomme un isomorphisme. L'idée en revient semble-t-il initialement à W. A. Howard, dont les notes écrites en 1969 à propos du livre de Curry et Feys, *Combinatory Logic* ne parurent qu'en 1980 (Howard 1969). Dans ces notes, Howard part des observations de H. Curry (cf. Curry & Feys, 1958) et de W. Tait. Le premier avait remarqué déjà la correspondance étroite entre les axiomes de la logique propositionnelle implicative et positive d'une part, et les combinateurs de base d'autre part. Ainsi le combinateur $\mathbf{K} = \lambda X.\lambda Y.X$ correspond à l'axiome $\alpha\rightarrow(\beta \rightarrow\alpha)$. Le second remarqua, quant à lui, la correspondance étroite entre l'élimination des coupures dans un système à la Gentzen et la réduction des λ-termes. Parallèlement, d'autres logiciens faisaient de semblables découvertes, on peut ainsi citer de N. J. de Bruijn[24], auteur du projet Automath (démarré en 1967)(G. de Bruijn 1980). L'objectif de de Bruijn n'était rien moins que de développer un système permettant de vérifier la correction des démonstrations mathématiques, objectif réalisé depuis, notamment par le système Coq, conçu initialement par Gérard Huet, à l'INRIA (cf. Y. Bertot & P. Casteran, 2004).

3 Le contenu procédural de la logique

3.1 Le problème du fondement des lois

Quelle est la portée philosophique de l'isomorphisme de Curry-Howard? En établissant une correspondance aussi rigoureuse, au départ dans le cadre de la logique intuitionniste, on met à jour le contenu algorithmique (autrement dit procédural) de la logique. Ceci est bien sûr entièrement nouveau : jusque là, logique rime avec discours, et plus précisément cohérence du discours. Quelles règles dois-je respecter pour que mon discours se tienne, que ses enchaînements soient justifiés et ses conclusions validées ? *Modus ponens*, *modus tollens*, règle de l'absurde (mais non en logique intuitionniste) sont alors les lois indépassables. Mais d'où viennent ces lois ? La problématique philosophique classique nous condamne en général à l'impasse : nous sommes pris entre le psychologisme et une régression infinie. L'origine des lois pourrait être dans notre organisation mentale, elle serait alors psychologique, au grand dam de Frege et ses successeurs qui ont érigé l'anti-psychologisme en doctrine. Comme le disait Kant (repris par J. Cavaillès (1960)), « *recourir à la psychologie serait aussi absurde que tirer la morale de la vie. Il ne s'agit pas des règles contingentes mais des règles nécessaires qui doivent être tirées de l'usage nécessaire de l'entendement que sans aucune psychologie on trouve en soi* ». Si je fais des lois logiques des lois psychologiques, quelles lois rendront compte des raisonnements que je peux produire à propos de la recherche elle-même de ces lois psychologiques ? La logique, jusqu'ici, s'impose comme un canon, une discipline normative qu'il n'est pas possible d'expliquer sur des bases empiriques. Justifierons-nous alors les lois logiques par d'autres lois logiques, dans une régression infinie ? Le problème a été discuté encore récemment à propos du fameux paradoxe de Lewis Carroll (« Achille et la tortue »)(P. Engel, 2012) : rien ne peut m'obliger à

[24] Récemment décédé (2011)

admettre la vérité d'une prémisse supplémentaire, toujours exigée pour passer de « A » et « si A alors B » à « B ». Le passage, prôné par Russell, de l'intérieur du langage à son extérieur, selon l'idée qu'il faudrait admettre une règle de détachement qui ne s'exprimerait pas dans le langage objet, reste mystérieux : c'est un saut qui nous arrange mais nous rien ne dit d'où vient cette opération de détachement.

3.2 *Un changement de perspective*

Si nous restituons à la logique son contenu algorithmique, la perspective change. Même si pendant de longs siècles, ce contenu est passé inaperçu, on ne peut plus aujourd'hui s'en abstraire (inutile, à la manière des Pythagoriciens horrifiés par la découverte des irrationnels, de blâmer le découvreur et de l'envoyer dans la furie des flots où il aurait dû disparaître). Ainsi, *raisonner, c'est calculer*. Appliquer la règle du *modus ponens*, ça n'est rien d'autre qu'appliquer une fonction à son argument, celle du syllogisme, composer deux fonctions. Il n'y a pas plus de mystère à « détacher B » de « si A alors B » au moyen de « A » qu'il y en a à calculer la valeur d'une fonction $f(x)$ quand on remplace sa variable x par une valeur a.

4 L'élimination des coupures : une explicitation des preuves

4.1 *Le calcul intuitionniste*

Le cadre intuitionniste dans lequel l'isomorphisme de Curry-Howard s'est exprimé à ses débuts apporte évidemment un lot de limitations : ainsi, ne traitera-t-on que de *fonctions*. Et quoi de plus naturel en effet que de considérer que « sémantiquement », ce qui correspond le mieux à une formule implicative $A \Rightarrow B$, c'est l'idée d'une fonction qui, à tout élément de A associerait un élément de B. Cela est particulièrement clair dans l'interprétation donnée à la logique (intuitionniste) par Brouwer, et indépendamment par Kolmogorov (ainsi dénommée « interprétation BHK », le « H » étant celui de Heyting, fidèle collaborateur de Brouwer) qui considère que l'implication intuitionniste s'interprète comme une méthode systématique d'association d'une preuve de B

à toute preuve de A[25]. En considérant donc (ce que fera systématiquement la Théorie des Types de Martin-Löf (P. Martin-Löf, 1984)) que la signification d'une formule est l'ensemble de ses preuves et que l'on peut de la sorte quasiment identifier une formule à un tel ensemble, la notion de fonction entre *A* et *B* prend tout son sens : les « éléments » de *A* et de *B* sont tout bonnement des preuves de ces formules. Ainsi, en logique intuitionniste, les relations de déductions sont-elles orientées : les prémisses sont des *inputs* et la seule et unique conclusion *l'output*. La meilleure manière de les représenter est au moyen de séquents, à la Gentzen, sauf que contrairement au cadre « logique classique » dans lequel Gentzen a développé son calcul, pour lequel les séquents sont symétriques (de la forme A_1, A_2,..., A_n |-- B_1, ..., B_m où la virgule à gauche s'interprète comme un « et » et la virgule à droite comme un « ou »), ici, ils sont dissymétriques : une seule formule en partie droite, donc de la forme A_1, A_2,..., A_n |-- B. Ceci est évidemment une garantie à la fois pour interdire l'usage du tiers-exclu mais aussi celui de la double négation[26]. Le calcul des séquents intuitionniste, comme le calcul classique, jouit de la propriété *d'élimination des coupures*. Cela signifie que de toute preuve utilisant la règle de coupure, on peut supprimer, selon un algorithme bien déterminé, toute occurrence de cette règle. On obtient en sortie de l'algorithme une nouvelle preuve du même séquent, mais qui est une preuve *sans* coupure. Cela entraîne, entre autres choses, que toute formule qui peut être prouvée peut l'être sans utiliser la règle en question. Or, le système des règles de la logique propositionnelle intuitionniste, hormis la règle de coupure justement, possède une autre propriété intéressante, qu'on appelle *propriété de la sous-formule*, selon laquelle dans la recherche d'une preuve en partant du résultat à atteindre, toutes les sous-formules du séquent conclusion se retrouvent dans les séquents prémisses, sauf évidemment la formule active au pas de déduction considéré. C'est grâce à cette dernière propriété qu'on obtient une véritable *procédure de*

---

[25] Voir les fameux chapitres de Dummett sur l'intuitionnisme dans (M. Dummett, 1977).

[26] En logique classique, la loi du tiers exclu s'impose d'elle-même à partir de l'axiome d'identité. En effet, de A|-- A, on déduit |-- ¬A, A, autrement dit : |-- ¬A ∨ A. La symétrie du calcul fait qu'une formule peut aller et venir entre les deux côtés d'un séquent, par le jeu de la négation. De A |-- A, on déduit |-- ¬A, A, puis ¬¬A|-- A. Avec la contrainte d'une seule formule en partie droite, ces déductions ne sont plus permises. On ne peut prouver |-- ¬ A ∨ A que si on a ou bien une preuve de A ou bien une preuve de ¬ A, auquel cas, cela nous est bien égal d'affirmer qu'on a l'un ou l'autre!

décision. Si l'on combine en effet élimination des coupures et propriété de la sous-formule, on obtient le fait que cette dernière nous donne dans tous les cas une procédure de détermination d'une preuve sans coupure, alors que la première de ces propriétés nous assure que l'ensemble des séquents prouvés sans coupure est « complet », il n'y en aura jamais d'autre si nous adoptons en plus la règle de coupure.

Notons alors que la propriété d'élimination des coupures, pour un tel système, a une portée philosophique non négligeable. Elle signifie qu'il peut y exister des règles dont la présence est en quelque sorte *immanente* : il ne s'agit pas de règle que l'on rajoute de l'extérieur, ni même de règle qui se déduise d'autres règles[27]. La redondance de la règle de coupure est d'une autre nature. Elle est de l'ordre de *l'implicite* du système de règles global privé d'elle. En la formulant dans le système, on ne fait que *l'expliciter*.

L'autre point d'importance, comme il a déjà été mentionné au premier paragraphe, est l'établissement du lien entre la procédure d'élimination de la règle de coupure et la réduction des λ-termes. Pour cela, il nous faut davantage expliciter le système. Nous nous contenterons, pour des raisons de simplicité, du sous-système de la logique implicative positive, dans lequel nous avons deux règles logiques, l'une pour introduire à gauche le symbole d'implication, l'autre pour l'introduire à droite, en plus de l'axiome d'identité et de la règle de coupure. Les règles structurelles sont celles qui permettent de gérer l'espace des formules[28].

Règles d'identité et règles logiques:

Axiome : A |-- A

Coupure :

$$\frac{\Gamma \mid\!-\!- A \qquad \Delta, A \mid\!-\!- B}{\Gamma, \Delta \mid\!-\!- B}$$

[27] Il serait absurde de vouloir déduire la règle de coupure des autres règles de la logique (classique ou intuitionniste), qui sont, pour l'essentiel, des règles liées à l'introduction des connecteurs logiques (à gauche ou à droite du symbole de déduction |--) .

[28] Qui sont donc considérées comme des instances de formules et non comme des formules à proprement parler.

Introduction à gauche :

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}$$

Introduction à droite:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

Règles structurelles:

Affaiblissement:

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Contraction:

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Permutation:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, B, A \vdash C}$$

En vertu de l'isomorphisme de Curry-Howard, ces règles peuvent être associées à la construction de λ-termes selon l'enrichissement du système donné dans le tableau suivant.

Etiquetage des règles par des λ-termes

Axiome : $x:A \vdash x:A$

Coupure :

$$\frac{\Gamma \vdash u{:}A \quad \Delta, x{:}A \vdash f{:}B}{\Gamma, \Delta \vdash [u/x]f{:}B}$$

Introduction à gauche :

$$\frac{\Gamma \vdash a{:}A \qquad \Delta, x{:}B \vdash u{:}C}{\Gamma, y{:}A \Rightarrow B \vdash [(y\ \ a)/x]u{:}C}$$

Introduction à droite :

$$\frac{\Gamma, x{:}A \vdash f{:}B}{\Gamma \vdash \lambda x.f{:}A \Rightarrow B}$$

autrement dit, l'axiome identifie les termes, la coupure se traduit en une opération de *substitution* : le u de type A démontré dans la prémisse gauche se substitue à la variable x utilisée pour « construire » le terme f dans la prémisse de droite (c'est ce qu'exprime la notation [u/x]f : substitution de u à x dans f), l'introduction à gauche de l'implication se traduit aussi par une substitution (en cela, elle est très proche de la règle de coupure), mais il s'agit de celle de *l'application* de y de type fonctionnel $A \Rightarrow B$ à a de type A à la variable x utilisée pour « construire » le terme u (application notée (y a)), et l'introduction à droite par *l'abstraction* dans le terme u sur la variable x introduite dans la prémisse pour « construire » u.

Imaginons alors une portion de preuve contenant une occurrence de la règle de coupure[29]

$$\frac{\dfrac{\Delta, y{:}\ A \vdash f{:}B}{\Delta \vdash \lambda\, y.f{:}A \Rightarrow B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha{:}A \qquad \Gamma, x{:}B \vdash \gamma{:}C}{\Gamma, u{:}A \Rightarrow B \vdash [(u\ \ \alpha)/x]\gamma{:}\ C}}{}$$

[29] Ceci représente le cas, dans la démonstration du théorème d'élimination de la coupure, où deux règles symétriques se rencontrent, l'une d'introduction à gauche l'autre à droite du même connecteur.

$$\Delta,\Gamma|\text{--}\ \ [(\lambda\, y.f\quad \alpha)/x]\ \gamma\text{: C}$$

(Remarque: λy.f se substitue à u dans le terme [(u α)/x] γ, d'où le résultat).
L'algorithme remplace cette coupure par deux autres instances de cette même règle, mais de « degré » inférieur, on obtient le fragment de preuve suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\Delta,\ \text{y:A}|\text{--}\ \ \text{f:B} \qquad \Gamma|\text{--}\ \ \alpha\text{:A}}{\Delta,\ \Gamma|\text{--}\ \ [\alpha/\text{y}]\text{f: B}} \qquad \Gamma,\ \text{x:B}|\text{--}\ \ \gamma\text{:C}}{\Delta,\ \Gamma|\text{--}\ \ [[[\alpha/\text{y}]/\text{f}]/\text{x}]\gamma\text{: C}}$$

Ce faisant, le λ-terme (λy.f α), substitué à *x* dans γ, s'est transformé en [α/y]f, qui est justement le résultat de la β-réduction du terme (λy.f α). Une étape dans l'algorithme d'élimination de la règle de coupure s'est donc traduite en une étape de calcul dans la β-*réduction* d'un λ-terme. On peut dès lors dire avec raison que raisonner c'est calculer, au sens bien précis que le mot « calculer » revêt dans l'expression « calcul fonctionnel »[30].

4.2 De la logique intuitionniste à la logique linéaire

Il fallait la réflexion profonde d'un Girard (J-Y. Girard 1987, 1999, 2001, 2003, 2006), pour affranchir la logique des limitations de la logique intuitionniste tout en gardant ses propriétés remarquables de constructivité et de procéduralité. Il fallait pour cela lui redonner ses symétries fondamentales : pourquoi l'espace des conclusions ne serait-il pas le symétrique de celui des prémisses ? Pourquoi ne pourrait-on pas inverser les flux d'information entre parties gauches et droites des séquents ? La loi de contraposition ne devrait-elle pas reconquérir tous ses droits (qu'elle n'a pas en logique intuitionniste)? Mais sur quoi se base la contraposition? Sur le fait que l'on puisse librement échanger les formules de part et d'autre du symbole de déduction, mais

évidemment cela ne se fait pas sans que lesdites formules ne soient changées.

[30] On sait que toute l'entreprise de Church et Curry est tournée au départ vers la formulation rigoureuse du problème de la substitution des variables par des termes au sein du calcul fonctionnel.

Ici intervient le rôle de la négation (et de son caractère involutif), qui n'est pas, contrairement à ce qu'aurait pu dire Monsieur de La Palice, de « nier » un énoncé, mais de le changer de lieu (entre les lieux de conclusion et les lieux de prémisse), avec ce que cela emporte comme autres changements, par exemple de la notion de *preuve* à celle de *réfutation*. Quel est alors le ressort secret de cette nouvelle logique constructive, qui respecte les symétries de la logique classique alors qu'on sait que cette dernière n'a pas la propriété de constructivité que possède la logique intuitionniste? Un tel ressort se trouve dans cette autre découverte, due à Jean-Yves Girard, que lorsqu'on sépare les règles structurelles des règles logiques, et que l'on restreint ou maîtrise les possibilités offertes par les premières, il devient possible de décomposer assez finement les opérateurs de base de la logique. La suppression des règles dites d'affaiblissement et de contraction (au départ accomplie à des fins algorithmiques, de manière à maîtriser la complexité de l'élimination des coupures) fait apparaître d'une part la place de connecteurs nouveaux (deux variantes pour « et » et « ou », la variante additive et la variante multiplicative), mais aussi la prégnance d'un type d'implication nouveau, ni « classique », ni « intuitionniste », mais « linéaire ». Les travaux de base en logique linéaire, ceux que Girard a accomplis dans les années quatre-vingt, ont consisté à étudier une sémantique en quelque sorte topologique des preuves, au sens où déjà des auteurs comme Scott et Strachey l'avaient tenté (J. Stoy, 1977). L'interprétation de l'implication logique comme fonction était acquise, encore s'agissait-il de préciser de quel type de fonction il s'agissait. Fonction entre espaces topologiques disaient Scott et Strachey, mais l'affinement était encore insuffisant. En mettant à jour la notion d'*espace cohérent*, Girard apportait d'importantes précisions sur ce genre de fonction qui « consommait » chaque élément d'information d'un premier espace, présenté comme espace de cliques, vers un autre : ce genre de fonction était « linéaire » presqu'au même sens où, en algèbre, on parle d'application linéaire. A partir de là, les deux « briques » de base pour reconstruire la logique étaient l'implication linéaire, opérateur de consommation d'une ressource pour en produire une autre, et «l'exponentielle », sorte de modalité unaire permettant de retrouver le caractère infinitaire de la réutilisation d'une formule. Cette décomposition fondamentale

s'écrivait :

$$A \Rightarrow B \equiv !A \multimap B$$

Un tel schéma prend tout son sens du point de vue d'une *théorie de l'action*. Une action a, parmi ses composantes, le fait d'être une transformation d'état : l'état initial est pris comme base, mais une fois l'action accomplie, il a disparu, remplacé qu'il est par un nouvel état. Si A --o B représente l'action (par exemple « ouvrir une porte, actuellement fermée ») alors le *modus ponens* n'est rien d'autre que l'accomplissement de l'action : d'un état « porte fermée », on passe naturellement à un état « porte ouverte » par application de la ressource actionnelle A --o B (autrement dit... en ouvrant la porte!)[31]. Rien de mystérieux là-dedans, en tout cas pas de quoi se plonger dans un abîme de réflexion qui chercherait à établir d'où vient cette contrainte que si nous acceptons A --o B et si nous acceptons A, alors nous devons accepter B. Nous n'avons ici rien à décider ! C'est la physique, ou la nature, qui décide pour nous.

5 Géométrisation des preuves : la détermination des preuves par l'exécution des calculs

Si ce sont les λ-termes de Church et Curry qui encodent les preuves en logique intuitionniste, ce sont nécessairement des objets généralisant ces derniers qui peuvent le faire en logique linéaire. La surprise vient de ce qu'il s'agisse d'objets *géométriques*. Nous limiterons ici notre attention au fragment de la logique linéaire qui ne contient ni les additifs ni les exponentielles, autrement dit à ce qu'il est convenu d'appeler la Logique Linéaire Multiplicative sans Exponentielles (ou **MLL**). Il est facile de montrer que, dans ce système, le séquent:

$$A^{\perp} \otimes (A \wp B^{\perp}) \mid\!-\!- B^{\perp}$$

est prouvable. Il équivaut d'ailleurs au séquent unilatère $\mid\!-\!-\ A \wp (A^{\perp} \otimes B), B^{\perp}$[32]. Nous donnons en annexe l'ensemble des règles de la logique linéaire, en format calcul des séquents bilatères. On notera que la négation ¬ est notée comme une orthogonalité ($A^{\perp}$ au lieu de ¬A).

[31] On notera que, une fois la règle du *modus ponens* appliquée, il ne reste plus ni A - l'état initial a disparu, bien entendu - ni A --o B, autrement dit, on ne peut pas ouvrir une porte deux fois de suite, sans qu'elle n'ait été refermée entre temps!

[32] On peut en effet vérifier sans peine que, grâce aux facilités offertes par la négation involutive dont jouit la logique linéaire, tout séquent bilatère peut se transformer en un séquent unilatère équivalent, et que, de ce fait, il est possible de donner une présentation totalement unilatère de la logique linéaire.

Une preuve de ce séquent est donnée par:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^{\perp}} \qquad \dfrac{}{\vdash B, B^{\perp}}}{\vdash A, A^{\perp} \otimes B, B^{\perp}}}{\vdash A \wp (A^{\perp} \otimes B), B^{\perp}}$$

Cet « objet-preuve » est redondant au sens où de nombreuses écritures sont inutiles. Par exemple, $B^{\perp}$ est mentionné trois fois, pour n'être utilisé en réalité qu'une seule: lors de l'application de la règle axiome au-dessus de la dernière prémisse à droite. De même, A est reproduit inutilement de la deuxième ligne vers la première (toujours en lisant les preuves du bas vers le haut, dans une démarche classique de recherche de preuve). A chaque étape de la déduction, une seule formule est active, celle qui a comme connecteur principal celui ayant servi au choix de la règle à cette étape. Le reste du séquent est passif et n'a pas à être reproduit. Avec cela à l'esprit, nous pouvons tenter de réécrire cette preuve sous la forme d'abord d'un arbre dont chaque noeud non terminal illustre l'application d'une règle (cf. fig. 1),

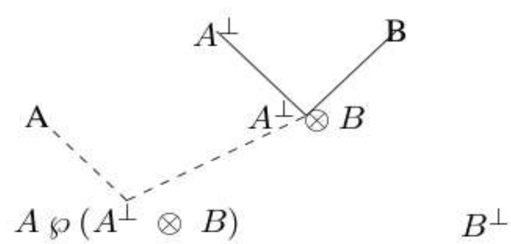


FIG. 1 – Arbre des applications de règles

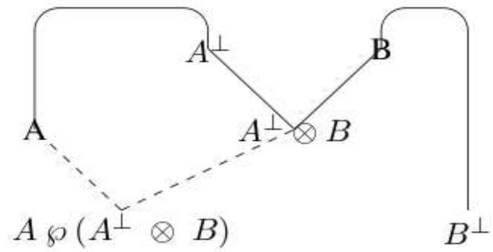


FIG. 2 – Structure de preuve

puis ensuite, en ajoutant des liens pour chaque application de la règle axiome, ce qui donne fig. 2.

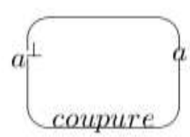
La propriété essentielle de cette figure est que, quel que soit le choix d'une voie dans un embranchement en pointillés, les embranchements pointillés étant ceux associés au connecteur ℘ alors que les embranchements en trait plein sont associés à ⊗, elle reste *connexe* et *sans cycle*. Ce résultat est du à Vincent Danos et Laurent Régnier (V. Danos & L. Régnier, 1989). Auparavant, dans son article princeps de 1987 (J-Y. Girard 1987), Girard avait formulé un autre critère de correction qui s'exprimait en termes de *voyages* (c'est-à-dire de manières de parcourir un tel graphe selon des instructions impératives associées à chaque type de lien). Noter qu'évidemment, si nous échangeons les connecteurs dans le séquent prouvable ci-dessus, outre que l'on obtient bien évidemment un séquent qui n'est plus prouvable, le graphe associé ne possède pas cette propriété géométrique. D'une façon générale, nous appellerons *réseau de preuve* une structure de preuve (c'est-à-dire un graphe associé à un séquent, qu'il soit prouvable ou non) qui vérifie le critère de correction de connexité et d'absence de cycle pour toute sélection d'une branche parmi les embranchements ℘. Ayant perçu cela, on peut désormais franchir une nouvelle étape en se débarrassant de la formulation séquentielle: un réseau de preuve n'est plus un graphe que l'on associe à une preuve séquentielle, autrement dit qui vient après coup, mais un graphe dont les noeuds sont étiquetés par des formules, qui respecte la définition des liens (c'est-à-dire un lien ℘ ou ⊗ possède à sa racine une formule A ℘ B ou A ⊗ B et à ses feuilles respectivement A et B et un lien axiome relie des formules atomiques négatives l'une de l'autre) et le critère de correction. Que devient alors la règle de coupure? Elle est elle-même un lien, dont la racine est étiquetée par «coupure » et dont les feuilles sont des formules (pas nécessairement des atomes) qui sont négatives l'une de l'autre, et dont les branches seront également en traits pleins. Noter que dans la formulation séquentielle unilatère, la règle de coupure s'écrit:

$$\frac{\vdash A, \Gamma \qquad \vdash A^{\perp}, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

On peut la voir comme une variante de la règle du tenseur.
L'élimination des coupures se traduit e n une transformation de graphe:

- une coupure entre une formule $A \otimes B$ (resp. $A \wp B$) et une formule $A^{\perp} \wp B^{\perp}$ (resp. $A^{\perp} \otimes B^{\perp}$) donne deux coupures de plus faible degré l'une entre A et $A^{\perp}$, l'autre entre B et $B^{\perp}$
- une coupure entre un atome a (resp. $a^{\perp}$) et un atome $a^{\perp}$ (resp. a) relié par un lien axiome à une autre instance de a (resp $a^{\perp}$) donne simplement a (resp. $a^{\perp}$).

On peut démontrer que l'élimination des coupures maintient la nature de réseau de preuve, autrement dit conserve le critère de correction. Ainsi, le procès de normalisation (autre nom donné à l'élimination des coupures) «explique » le critère de correction en tant qu'invariant. On sait en particulier que l'on ne débouchera jamais sur une figure absurde, du genre:



où le processus ne s'arrêterait jamais[33]. On en vient à renverser l'ordre des déterminations. Au lieu, comme le fait la tradition classique, de partir d'une notion de preuve basée sur des règles de déduction qui sont présentées comme un donné indépassable pour en tirer ensuite une interprétation calculatoire, on peut proposer de partir des contraintes du calcul, comme la nécessité d'éviter des cycles (origines de non-terminaison) pour légitimer les règles. C'est ce que

[33] Songeons à l'interprétation de la coupure en termes d'opération de substitution: une telle figure symboliserait la substitution du même au même conduite indéfiniment...

J-Y. Girard entreprend de faire dans son programme actuel de *syntaxe transcendantale* (J-Y. Girard, 2012). Il ne s'agit, ni plus ni moins, reprenant des intuitions kantiennes, que d'interroger les conditions de possibilité mêmes d'un langage logique, et ce faisant, de remonter aux sources (cognitives ou physiques) des contraintes qui ont amené à une formulation stable des lois logiques.

6 Interaction

6.1 *Bipolarité et changements de rôle : l'appareil formel de l'énonciation*

En elle-même et dès son apparition, la logique linéaire a appelé une interprétation basée sur l'interaction, et notamment sur la notion de *jeu*. Il apparaît en effet que les connecteurs additifs donnent lieu à une interprétation en termes de choix: A & B (la conjonction additive de A et de B) ne se lit pas « A *et* B », mais comme possibilité active de choisir *entre* A et B (cf. règles en annexe), alors que la disjonction additive $A \oplus B$ se lit comme un « choix passif » (autrement dit l'admission d'un choix fait par un autre), lorsqu'on se place par exemple du point de vue d'un usager face à un serveur. Dans le premier cas, on modélise la possibilité qu'a l'usager de sélectionner une modalité (*thé* ou *café* par exemple...), alors que dans le second, on modélise le fait qu'il doit s'attendre à recevoir *l'une ou l'autre* sans qu'il puisse choisir laquelle. On constate alors que la négation, validant les lois de De Morgan, *échange les deux points de vue*. Dans un jeu, non plus entre un usager et un serveur, mais entre deux acteurs mis sur un pied d'égalité, quand l'un choisit, l'autre doit être prêt à recevoir le choix effectué.
Les opérateurs multiplicatifs auront une interprétation plus complexe, soit comme séquentialisation de deux processus appliqués l'un après l'autre (sans que l'ordre compte si l'on se maintient dans un cadre *commutatif*) soit comme une parallélisation. Ainsi l'équivalence classique entre implication et disjonction ($A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$) deviendra l'équivalence entre A --o B et $A^{\perp} \wp B$ qui signifie que, dans l'échange de A contre B, il y a bien parallélisation de deux processus, l'un consistant à donner A, l'autre à obtenir B. Les travaux de A. Blass (A. Blass, 1991) sur la notion de *jeu* ont débouché également sur une sémantique

de la logique linéaire selon laquelle le produit A⊗B représenterait une composition de deux jeux A et B entre un proposant et un opposant qui soit telle que lorsque c'est au proposant de jouer, il ou elle doit jouer dans le composant (A ou B) dans lequel vient de jouer l'opposant, alors que ce dernier à la possibilité de changer de composant selon son gré. A l'inverse, la combinaison de deux jeux par un $\wp$ inverse les rôles: c'est le proposant qui a libre choix tandis que l'opposant est forcé de suivre dans le composant qui lui est indiqué. C'est la raison pour laquelle le joueur amateur qui joue en parallèle contre deux champions d'échecs, disons Anand et Kramnik, possède nécessairement une stratégie (la fameuse stratégie *copycat*) qui lui assure le gain d'une des deux parties. Il lui suffit de commencer par laisser jouer l'un des joueurs, par exemple Anand, puis de recopier fidèlement le coup joué sur l'échiquier de sa partie avec Kramnik, d'enregistrer ce que Kramnik joue en réponse et de recopier cette réponse sur l'échiquier de sa partie avec Anand et ainsi de suite. A la fin, si on admet que soit Anand soit Kramnik est vainqueur, notre joueur amateur aura nécessairement gagné une des deux parties. Ceci illustre simplement la validité du tiers exclu quand le « ou » est réalisé par la disjonction multiplicative puisque les jeux joués par l'amateur sont respectivement A et $A^{\perp}$. Le joueur amateur a en effet l'opportunité de choisir le jeu dans lequel il opère: il choisit au départ le jeu contre Anand, autrement dit Anand a les blancs et il joue évidemment dans ce jeu, ensuite l'amateur choisit le jeu contre Kramnik, où c'est lui, cette fois, qui a les blancs et prend la place d'Anand pour jouer sur son échiquier, alors qu' au coup suivant, ayant enregistré la réponse de Kramnik au coup d'Anand, il prend la place de Kramnik. Ainsi passe-t-il d'un jeu à l'autre par échange des rôles (tantôt Anand tantôt Kramnik) donc par négation. Si l'un des jeux est A, l'autre est $A^{\perp}$ et compte-tenu de sa liberté de changer de composant à chaque coup, l'amateur les combine par un $\wp$. Ceci peut paraître anecdotique, on peut néanmoins y voir une généralisation de la règle structurelle des jeux dialogiques de Lorenzen (cf. Felscher, 1986, Rahman, 2005) selon laquelle une proposition atomique ne peut être avancée par un participant à la discussion qu'à condition que son partenaire la lui ait antérieurement concédée. Dans un jeu interne à la Lorenzen, ma contribution au dialogue vise à obliger l'autre à me concéder ce dont j'ai besoin pour ma preuve. C'est sensiblement la même chose qui se produit dans le cas du joueur qui combine savamment deux parties afin d'utiliser ce que donne l'une pour mieux résoudre l'autre. On peut soutenir bien entendu que cela s'inscrit dans une perspective « anti-réaliste » puisqu'il n'est nul besoin de se référer à un modèle pour conclure une argumentation dans un tel cadre, et, bien sûr, cette position peut être discutée. Il n'empêche cependant qu'elle permet de capter ce qu'il y a sûrement d'essentiel dans le langage, à savoir la possibilité de *l'échange des rôles* et au-delà, la manière dont chaque locuteur est capable d'embrayer sur l'intervention d'un autre, par imitation ou par complétion. Cela n'est pas sans rappeler les analyses données par Ruth Kempson (R. Kempson, 2005) concernant des phénomènes d'énonciation divisée qui se produisent quand un locuteur continue la parole d'un autre dans un dialogue. Cette théorie de l'interaction issue de la logique linéaire nous semble, au-delà même de ces analyses, éclairer le phénomène de *l'énonciation*. Celui-ci, on le sait, trouve originellement son lieu d'études dans les travaux d'Emile Benveniste (E. Benveniste, 1974). Il se trouve relié à la pragmatique pour autant que cette dernière englobe les questions vues sous l'angle des *indexicaux*, et en linguistique de l'énonciation sous celui des *embrayeurs*. Ces formes (pronoms personnels, temps du verbe, démonstratifs) ont pour fonction remarquable de *mettre en rapport le dire avec le dit*. Pour Benveniste, on ne saurait saisir leur fonctionnement sans passer de l'analyse des énoncés à celle des rapports entre les énoncés et leur instance productrice. Or, il y a quelque chose de frappant dans l'utilisation du pronom « je », c'est, pour le dire comme le philosophe Francis Jacques (F. Jacques, 1979, p. 124), qu' « *elle oblige celui qui parle à se marquer comme locuteur par le même mot que son interlocuteur utilisera pour se marquer lui-même* «.

La métaphore du joueur simultané contre Anand et Kramnik peut alors se reformuler ainsi. Il s'agit d'imaginer à la place de ce joueur fictif une « Règle fondamentale », qui est la règle du dialogue en général et qui distribue en alternance les coups sur deux parties simultanées, chacune étant le point de vue d'un des locuteurs par rapport à l'autre. Le locuteur qui avance les blancs dit « je » et s'adresse à l'autre en lui disant « tu ». Changer de partie, pour la règle fondamentale, consiste à interchanger blancs et noirs. De ce fait, « je » devient « tu » (et réciproquement) et celui qui dit nouvellement « je » ne fait que copier la posture de son partenaire, qui disait antérieurement « je » (en faisant abstraction momentanément du contenu délocutif des propos échangés). Que ce joueur simultané, autrement dit, la Règle fondamentale, «gagne » toujours, soit contre l'un soit contre l'autre, traduit le fait que tout dialogue fini a une issue, peu importe celui des deux dialoguants qui met un terme à l'échange. Le fait de «recopier » le mouvement de l'un pour le reporter sur l'échiquier avec l'autre traduit le fait que tout dialogue suppose une reconnaissance réciproque des coups joués par l'un et l'autre dialoguants, ce que Benveniste décrivait en disant: « *dans l'énonciation, la langue se trouve employée à l'expression d'un certain rapport au monde. La condition même de cette mobilisation et de cette appropriation de la langue est, chez le locuteur, le besoin de référer par le discours, et, chez l'autre, la possibilité de co-référer identiquement, dans le consensus pragmatique qui fait de chaque locuteur un co-locuteur »* (E. Benveniste, 1974, p. 82).

6.2 *Le sens des règles dans les règles elles-mêmes*

La tradition classique s'illustrant dans la théorie des modèles, et qui remonte aux travaux pionniers de Tarski, veut que le sens ultime des constructions logiques réside dans un rapport au monde symbolisé par la confrontation du système formel et de son modèle. « *D'un côté, nous avons un langage formel (syntaxe) incluant des règles formelles (et des axiomes, qui sont des règles sans prémisses) nous permettant de dériver des formules distinguées, appelées théorèmes; et de l'autre, nous avons une classe de structures algébriques (sémantique) incluant des valeurs distinguées appelées valeurs de vérité. La syntaxe est interprétée dans la sémantique, avec deux propriétés désirables: cohérence (les théorèmes sont interprétés comme des vérités) et complétude (une formule dont l'interprétation est toujours le vrai est un théorème)* » dit Girard dans (J-Y. Girard, 1999). Cette démarche peut évidemment être riche d'enseignements, surtout lorsqu'on considère des résultats... d'*in*complétude comme le théorème de Gödel. De tels résultats montrent en effet qu'il est vain dans la plupart des cas intéressants (les théories mathématiques qui incluent au moins les axiomes de Peano) d'attendre l'existence d'un langage qui reflèterait parfaitement son objet. Ils marquent donc plus une limite de la conception classique du langage comme rapport externe au monde qu'une « limitation » de la logique comme on l'entend souvent énoncer. Ce qui est ici en cause, c'est bien l'idée du langage comme ne se soutenant que de la « réalité » qu'il décrit. Pour cette idée, les propriétés du langage ne seraient que la traduction syntaxique de celles du modèle. Or, comme nous l'avons abondamment rappelé plus haut, certaines des propriétés des langages logiques, parmi les plus importantes (propriété de Church-Rosser, propriété d'élimination des coupures, propriété de la sous-formule) n'ont aucun correspondant au niveau des modèles proposés et ne sauraient donc provenir de ce que le langage est censé décrire. Si « sens » il y a, ce sens n'est pas dans un extérieur au langage, contrairement à toute une tradition de sémantique dénationnelle qui dérive de Frege en passant par Montague, Lewis ou Kaplan, et qui ne jure que par l'identification de la signification des énoncés à leurs conditions *de vérité*. On connaît les limites de la sémantique des modèles: en toute rigueur, la vérité d'une phrase S de L_0 dans un modèle s'exprime elle-même par une formule ϕ_S, démontrable dans un autre système L_1, qui à son tour pourrait s'interpréter dans un autre modèle et ainsi de suite, par progressions successives de L_0 vers L_1, méta-langage de L_0, puis vers une infinité potentielle de méta-méta-... - langages. La sémantique tarskienne ouvre sur une fuite infinie vers des niveaux *méta* successifs. L'idéal serait bien sûr de localiser un « sens » dans le système lui-même, comme si, en quelque sorte, la logique des règles pouvait coïncider avec les règles de la logique, ce qui est parfois le cas en logique intuitionniste, notamment pour la disjonction, puisque prouver $A \vee B$, c'est bien prouver A *ou* prouver B. Mais évidemment prouver $\neg B$ n'est pas « ne pas prouver B » ! Il y a une marge entre la vérité d'une formule et sa prouvabilité[34]... Néanmoins, la signification particulière donnée, en logique linéaire, à la négation (cf. plus haut), en tant que simple phénomène de dualité (c'est-à-dire d'échange de place) permet d'envisager cette entreprise puisque prouver $B^{\perp}$ revient bel à bien, dans ce cadre, à *réfuter* B[35]. On peut en dire plus sur la dualité en partant de l'idée de

[34] Sinon, le théorème de Gödel serait privé de sa substance!

[35] Si la négation est l'échange de deux partenaires, si l'un des deux s'engage à prouver B, $B^{\perp}$ va représenter non pas, simplement non-B, mais ce que l'autre partenaire tend à faire en réaction. L'élimination des coupures permet alors d'affirmer que les deux partenaires ne peuvent « avoir raison » tous les deux puisque cela entraînerait la validité du séquent vide (|--). Donc ce que fait le deuxième partenaire, c'est tenter d'établir une contre-preuve face à celle que tente le premier, autrement dit il cherche à *réfuter* B. Noter que, si, en logique classique ou intuitionniste, l'entreprise visant à trouver le sens des règles dans les règles elles-mêmes aboutit à l'absurdité selon laquelle pour prouver $\neg B$, il suffirait de ne pas prouver B, dans l'approche linéaire, prouver $B^{\perp}$ revient à construire une contre-preuve pour B.

réseau de preuve. Etant donnée une formule quelconque φ, on peut, comme on a vu plus haut, la décomposer graphiquement en liens $\otimes$ et $\wp$. Le critère de correction nous oblige alors à envisager toutes les possibilités de positionnement des « interrupteurs » (c'est-à-dire des branches issues d'une sous-formule en $\wp$). Si on considère une manière de connecter les atomes (par liens axiomes), chaque possibilité de positionnement représente un *test*: le positionnement, combiné avec l'ensemble des liens axiomes, doit vérifier le critère de connexion et d'acyclicité. A contrario, chacune de ces possibilités représente une preuve potentielle de la *négation* de cette même formule, autrement dit de $\varphi^{\perp}$. En effet, il suffit que l'une réalise un cycle avec l'ensemble des liens axiomes pour que φ soit infirmée. Où émerge une nouvelle idée: et si, au lieu d'être l'ensemble de ses preuves, la signification d'une formule n'était l'ensemble de ses *contre*-preuves potentielles?

Une telle hypothèse résonnerait remarquablement avec les courants en philosophie qui se réclament du « pragmatisme analytique », comme c'est le cas du courant représenté par R. Brandom (R. Brandom, 1994, 2000). Pour ce dernier en effet, le contenu représentationnel des énoncés réside justement dans le potentiel qu'ils recèlent du point de vue des engagements qu'ils permettent de prendre et des justifications que leur locuteur est susceptible d'apporter face à des demandes de justifications. Reprenant cette formulation à son maître Sellars, Brandom voit au sein du langage un jeu fondamental[36] qu'il désigne comme le *jeu de l'offre et de la demande de raisons*. Mais qu'est-ce qu'une *contre-preuve* potentielle pour une formule φ? Ce n'est certainement pas une *preuve* de non-φ, puisque si φ a une preuve, impossible que $\varphi^{\perp}$ en ait également une. Tout juste pourrait-on dire qu'il s'agit de la tentative d'élaborer une preuve du jugement contraire. En tout cas, cela fait surgir dans notre univers de nouveaux objets processuels: à côté des preuves subsistent des contre-preuves, et comme *a priori* on ne distingue pas les deux sortes d'objets, on les confondra dans une entité globale, celle des *parapreuves*. L'idée est donc la suivante: renversant une nouvelle fois l'ordre conventionnel qui consiste à partir de preuves, que l'on obtient par applications récursives de règles, on oeuvre à

[36] Contrairement à Wittgenstein (Wittgenstein, 1953) qui, lui, refusait d'admettre un « *downtown* » au langage, tous les jeux se situant au même niveau, et dans une variation indéfinie.

l'intérieur d'un espace de parapreuves au sein duquel on tentera de faire apparaître des preuves par le jeu de l'interaction, c'est-à-dire de la confrontation d'une parapreuve pour φ et d'une parapreuve pour $\varphi^{\perp}$. On sait qu'une parapreuve est une preuve lorsque sa parapreuve duale *échoue*, ce qui arrive lorsque, acculé à une situation dépourvue de raisons, on est obligé de clore sur l'application d'une règle qui n'en est pas vraiment une: une « règle » qui simplement dit que l'on rend les armes. Cette règle, qui est illégale, ou qui est un *paralogisme*, peut se représenter par « l'axiome » $|\text{--}\ \Gamma$, où Γ est une suite quelconque de formules[37]. On pourra objecter que l'on peut sans doute fabriquer une tentative de contre-preuve pour une formule donnée, s'opposant à une construction de preuve, mais que l'on ne sait pas forcément identifier la contre-preuve comme étant bien la parapreuve duale de cette construction. La réponse est simple: il suffit qu'à chaque pas de la confrontation entre les deux objets, on se trouve en présence de la même situation d'opposition entre deux parapreuves, l'une pour une sous-formule ψ, l'autre pour sa négation $\psi^{\perp}$. On reconnaît alors exactement la démarche suivie dans une normalisation (ou dans l'algorithme d'élimination de coupure). Autrement dit, c'est la procédure de normalisation (définissable sur les objets parapreuves) qui établit concrètement l'interaction des deux processus. A chaque pas de normalisation, l'espace de confrontation se réduit jusqu'à ce que, dans certains cas favorables, on se trouve en présence d'une preuve φ et d'une contre-preuve φ' se terminant par le paralogisme ci-dessus. En ce cas, on admettra que le processus d'interaction converge.

Du point de vue de la philosophie du langage, cette avancée est déterminante: elle permet désormais de situer la signification au niveau de l'interaction et de formaliser l'intuition d'Oswald Ducrot dans les années soixante-dix (O. Ducrot, 1977), selon laquelle on devait voir « *l'action réciproque des interlocuteurs comme le fait linguistique fondamental* ». La deuxième partie de cet article nous permettra de préciser cette idée.

7 Conclusion (de la première partie)

Nous avons, dans ce qui précède, tenté d'expliciter les bases d'un programme

[37] Tel est en particulier le séquent vide, évoqué à la note 13.

de recherches en logique qui a débuté maintenant depuis au moins trois décennies et qui visait au départ à entrer plus avant dans la décomposition des opérateurs logiques. Cette entreprise n'était pas initiée à la légère: elle s'inscrivait à la suite d'une masse de travaux préalables en informatique théorique, qu'on pourrait appeler plus justement ici «science des programmes». Il s'agissait de travailler à une sémantique dénotationnelle des programmes dans la ligne déjà indiquée par Scott et Strachey. La logique linéaire est apparue à partir d'une sémantique: celle des espaces cohérents, espaces accompagnés de morphismes autorisant une définition plus juste des primitives du calcul. De là est venue la fameuse équivalence de A ⇒ B (implication classique) et !A –o B (implication linéaire combinée avec l'exponentielle) qui a permis de mettre au premier plan deux concepts essentiels : la consommation de ressources (exprimée par « --o ») et la pérennité (exprimée par « ! »). Cette séparation a eu pour conséquence de bien isoler les questions de fond que rencontre la logique contemporaine: d'un côté un sous-système raisonnablement gérable[38] et utilisable dans toutes sortes d'applications (informatiques mais aussi, par exemple, linguistiques[39]), et de l'autre un domaine d'essences beaucoup plus difficilement exploitables conduisant à ce que Girard (J-Y. Girard, 2009) appelle des « monstres sans réel sens mathématique »[40], autrement dit une opposition entre une logique « parfaite » et une logique « imparfaite », non dans le sens d'une norme idéale qui serait respectée ou non, mais dans celui, beaucoup plus banal, d'une opposition *aspectuelle*, telle qu'elle est théorisée en linguistique (le parfait étant ce qui est assigné à une limite, l'imparfait à une absence de limite). Du côté de la logique parfaite, a pu surgir la notion de réseau de preuve qui, pour la première fois, permettait une individuation géométrique de la preuve. Les tentatives de déborder du perfectif pour atteindre (mais de manière raisonnée et par étapes) le domaine de l'imperfectif ont donné lieu à des réseaux plus complexes. La manipulation de ces réseaux,

[38] C'est-à-dire décidable, même si NP-complet ou P-space complet.

[39] Voir par exemple en linguistique, les multiples applications du principe de linéarité, combiné avec une restriction supplémentaire portant sur la commutativité, dans le cadre de ce que l'on connaît depuis 1958 sous le nom de « grammaires de Lambek », voir par exemple Retoré et Moot, 2012.

[40] La « pérennité » se localise dans la règle structurelle de contraction, responsable, lors de l'élimination des coupures, d'une explosion combinatoire se traduisant sous la forme de fonctions de la forme 2 à la puissance (2 à la puissance (2 à la puissance (... (2 à la puissance n)))), ce qu'on appelle des *tours d'exponentielles*.

quand elle ne demeure pas au niveau trivial d'un parcours de graphe, conduit à faire apparaître des notions d'opérateur et d'orthogonalité qui ne peuvent être conceptualisées qu'à une échelle mathématique intégrant la notion d'espace de Hilbert. La logique « mathématique » deviendrait-elle ainsi... réellement mathématique?

Nous verrons dans la deuxième partie comment la notion d'interaction vient ensuite donner un fondement de base, « géométrique », à notre intuition du sens, et, particulièrement, du sens logique (contenu dans les connecteurs, les formules connectées etc.). Ce thème est déjà apparu dans cette partie sous l'aspect d'une approche des principes fondamentaux du rationalisme pragmatique. A l'idée que la signification est basée sur la référence (ou la dénotation), idée popularisée par toute une tendance de la philosophie du langage contemporaine, consubstantielle à une conception *représentationnaliste* du langage, s'oppose un projet de fonder au contraire la référence (et la représentation) sur des processus de signification qui peuvent être vus soit comme des enchaînements d'inférences, donc des preuves, selon une perspective développée en Théorie Constructive des Types, mais aussi dans un courant philosophique jalonné par les pensées de Dummett, Sellars et Brandom, soit comme des stratégies ludiques, selon une optique déjà entamée par des auteurs comme Lorenzen ou Hintikka (Lorenz, 1961, Lorenzen, 1960, Felscher, 1986, Rahman, 2005, Keiff, 2006, Hintikka & Sandu, 1997) . Un tel projet ne va pas sans obstacles. On sait notamment qu'il est malaisé de donner une interprétation en termes de preuves à des énoncés du langage ordinaire, rendant ainsi difficile l'entreprise d'asseoir la logique sur des pratiques discursives pré-logiques, et que les évaluations qui ont lieu dans le cadre d'une logique dialogique sont pour l'essentiel cantonnées aux expressions langagières qui utilisent déjà des connecteurs ou des quantificateurs et qu'elles sont en général basées sur notre connaissance a priori des lois qui régissent ces derniers. Aller plus avant dans une voie *fondationnelle* suppose donc que l'on puisse se débarrasser de tout *a priori* langagier et que les stratégies ou les essais de preuves soient *premiers* par rapport aux formules ou aux expressions qu'ils prétendent justifier. Ici viendra donc s'inscrire un *concept d'interaction*, abstraitement et géométriquement défini, dont la seule contrainte associée sera *calculatoire* : l'interaction est ce concept qui permet de définir dans sa plus grande généralité la notion de cohérence d'un calcul. Si, ainsi, on a pu paraître un temps s'éloigner du réalisme en logique (en l'espèce le fameux réalisme des valeurs de vérité), c'est, de fait, pour mieux le ressaisir, mais sous un autre aspect: celui du *réalisme des contraintes calculatoires*[41].

Après que les lois logiques aient pu être ainsi ramenées à leur vraie origine, une autre question se posera : celle de l'origine même de l'interaction. On pourra alors envisager les thèses de J-B. Joinet et de P. Livet (J-B. Joinet, 2007, P. Livet, 2009), pour qui la logique s'enracine dans *la naturalité des processus*. La question ambitieuse à aborder sera alors celle du lien à établir entre *logique* et *ontologie*, l'ontologie étant ici entendue au sens d'une *ontologie des processus.*

8 Appendice: aperçu de logique linéaire

8.1 Règles sans les exponentielles

8.1.1 Règle structurelle:

La seule règle structurelle est la règle de permutation[42]:

Permutation, gauche et droite :

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \mid\!-\!- \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \mid\!-\!- \Delta}\,[Pg] \qquad \frac{\Gamma \mid\!-\!- \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \mid\!-\!- \Delta, B, A, \Delta'}\,[Pd]$$

[41] Dans un mouvement qui n'est pas sans rappeler celui de Dummett quand il se défend de tout idéalisme subjectiviste en disant: « Nous conservons dans notre manière de penser une conception fondamentalement réaliste de la vérité. Le réalisme consiste dans l'idée que, pour tout énoncé, il doit y avoir quelque chose en vertu de quoi, soit cet énoncé est vrai, soit sa négation l'est » (Dummett, 1977, p.62) Pour Dummett, ce qui est rejeté, ce n'est pas le réalisme en soi mais le réalisme associé à la théorie de la « vérité-correspondance ».

[42] La règle de permutation a également fait l'objet de tentatives de suppression, donnant ainsi lieu à diverses variantes de logique linéaire non commutative (voir essentiellement Abrusci et Ruet, 1999). En revanche la règle dite « d'associativité », utilisée ici implicitement, et qui autorise que l'on regroupe les termes librement, est considérée comme ne devant pas être supprimée, étant la garante des bonnes propriétés mathématiques du système (et du fait qu'on peut lui donner une bonne sémantique catégorique), ceci contrairement à certaines applications linguistiques où l'on s'est plu à développer des calculs non associatifs afin de rendre compte de la structure en constituants de la phrase.

8.1.2 Règles d'identité:

Axiome :

$$A \vdash A$$

Coupure :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{coupure}$$

8.1.3 Règles logiques:

Négation :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, A^{\perp} \vdash \Delta}\ [{}^{\perp}G]$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A^{\perp}, \Delta}\ [{}^{\perp}D]$$

Tenseur (conjonction multiplicative) :

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta}[\otimes\ G] \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B, \Delta, \Delta'}[\otimes\ D]$$

``avec '' (conjonction additive) :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}[\&\ D] \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}[\&\ G]d \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}[\&\ G]g$$

Disjonction

``par '' (disjonction multiplicative) :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \wp B \vdash \Delta, \Delta'}[\wp\ G] \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A \wp B, \Delta'}[\wp\ D]$$

``plus '' (disjunction additive) :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}[\oplus\ G] \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}[\oplus\ D]g \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}[\oplus\ D]d$$

Implication linéaire :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \vdash \Delta, \Delta'}[\multimap L] \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \multimap B, \Delta}[\multimap R]$$

On peut montrer, en analogie avec la logique classique, que:

$$A \multimap B \equiv A^{\perp} \wp B$$

De plus, il est possible d'établir de nombreuses équivalences (ici, on écrit $A \equiv B$ pour la conjonction de $A \vdash B$ et $B \vdash A$).

Règles de de Morgan :

$$(A\otimes B)^{\perp} \equiv A^{\perp} \wp B^{\perp} \qquad (A\&B)^{\perp}\equiv A^{\perp}\oplus B^{\perp}$$

$$(A \wp B)^{\perp}\equiv A^{\perp}\otimes B^{\perp} \qquad (A\oplus B)^{\perp}\equiv A^{\perp}\&B^{\perp}$$

Distributivité :

$$A\otimes(B\oplus C) \equiv (A\otimes B)\oplus(A\otimes C)$$

$$A \wp (B\&C) \equiv (A \wp B)\&(A \wp C)$$

Il est bon de noter que ces deux lois de distributivité ont guidé Girard dans son choix de symboles particuliers. Dans chaque famille, (respectivement $\{\otimes, \oplus\}$ et $\{\&, \wp\}$), un symbole intervenant dans une loi de distributivité est obtenu par rotation de 180° à partir de l'autre.

8.2 *Exponentielles*

La logique linéaire n'est pas seulement une logique « sous-structurelle », elle permet aussi d'encoder les logiques classique et intuitionniste à la condition qu'on acquiert la possibilité de réintroduire localement le pouvoir des règles structurelles, qui ont été abandonnées au niveau global. Ceci se fait grâce à des connecteurs unaires spéciaux, que Girard nomme des *exponentielles* car leur comportement est analogue à la fonction mathématique du même nom qui traduit une structure additive en une structure multiplicative. L'exponentielle «! » est telle que la ressource qu'elle affecte puisse être utilisée librement autant de fois qu'on le souhaite (y compris aucune). L'exponentielle « ? » est sa duale, autrement dit elle est définie par:

$$(?\,A)^{\perp} = !(A^{\perp})$$

$$(!\,A)^{\perp}= ?(A^{\perp})$$

Nous avons:

Introduction de ! :

$$\frac{\Gamma, A \mid\text{--}\Delta}{\Gamma, !A \mid\text{--}\, \Delta}\,[!\,G] \qquad \frac{!\Gamma \mid\text{--}\, A, ?\Delta}{!\Gamma \mid\text{--}\, !A, ?\,\Delta}\,[!\,D]$$

Règles structurelles :

$$\frac{\Gamma \mid\!-\!- \Delta}{\Gamma, !A \mid\!-\!- \Delta}\ [!\ W] \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \mid\!-\!- \Delta}{\Gamma, !A \mid\!-\!- \Delta}\ [!\ C]$$

Introduction de ? :

$$\frac{\Gamma \mid\!-\!- A, \Delta}{\Gamma \mid\!-\!- ?A, \Delta}\ [?\ D] \qquad \frac{!\Gamma, A \mid\!-\!- ?\Delta}{!\Gamma, ?A \mid\!-\!- ?\Delta}\ [?\ G]$$

Règles structurelles :

$$\frac{\Gamma \mid\!-\!- \Delta}{\Gamma \mid\!-\!- ?A, \Delta}\ [?\ W] \qquad \frac{\Gamma \mid\!-\!- ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \mid\!-\!- ?A, \Delta}\ [?\ C]$$

L'encodage de la logique intuitionniste repose sur l'équivalence suivante, qui établit un pont entre les deux implications:

$$A \Rightarrow B \equiv\ !A \multimap B$$

La traduction de la logique intuitionniste dans la logique linéaire est alors récursivement définie de la manière suivante:

$$(A)^{o} = A \quad \text{si } A \text{ est un atome,}$$
$$(A \Rightarrow B)^{o} =\ !A^{o} \multimap B^{o}$$
$$(A \wedge B)^{o} = A^{o}\ \&\ B^{o}$$
$$(A \vee B)^{o} =\ !(A^{o}) \oplus !(B^{o})$$
$$(\neg A)^{o} =\ !A^{o} \multimap \bot$$

(voir ci-dessous la définition de $\bot$).

On peut prouver d'autres équivalences:

$$!(A\&\ B) \equiv\ !A \otimes !B$$

$$?(A \oplus B) \equiv\ ?A \wp ?B$$

et d'autres relations de déduction:

$$!A \mid\!-\!- \mathbf{1}\ \&\ A\ \&\ (!A \otimes !A)$$

$$!(A \& B) \equiv\ !A \otimes\ !B$$

La relation $!(A \& B) \equiv\ !A \otimes\ !B$ donne son nom à l'exponentielle « ! » puisqu'elle transforme une structure additive en une structure multiplicative.

8.3 *Eléments neutres*

0 dénote l'élément neutre de $\oplus$, **1** celui de $\otimes$, tandis que $\perp$ dénote l'élément neutre de $\wp$ et T celui de &. Ainsi y a-t-il deux constantes pour l'absurdité, $\perp$ et **0**. **0** satisfait *ex falso quodlibet*, mais pas $\perp$. **1** est la ressource neutre: celle qui n'est consommée sans rien en échange. T tient lieu du « vrai « de manière un peu étrange, il est vrai: donner le choix entre A et T, c'est comme si on donnait directement A. La relation de déduction : $!A \mid\!-\!-\ \mathbf{1} \ \&\ A\ \&\ (!A \otimes\ !A)$ dit qu'avoir !A, c'est pouvoir choisir entre aucune occurrence de A (la ressource neutre), une occurrence de A ou bien la duplication de !A (donc d'une ressource neutre ou d'une occurrence de A et ainsi de suite récursivement, ce qui conduit à autant d'occurrences de A que l'on désire).

9 Références

M. Abrusci & P. Ruet, « Non-commutative logic 1 : the multiplicative fragment », Annals of Pure and Applied Logic, 101 (1), 1999, pp. 29 -64,

J.-M. Andréoli, « Logic Programming with Focusing Proofs in Linear Logic », *The Journal of Logic and Computation*, 2, 3, pp. 297-347, 1992,

E. Benveniste, « L'appareil formel de l'énonciation » in *Problèmes de linguistique générale, 2,* Gallimard, Paris, 1974,

Y. Bertot et P. Castéran, *The Coq Art*: *The Calculus of Inductive Constructions,* Springer, EATCS series, 2004,

A. Blass, « A Game Semantics for Linear Logic », *Annals of Pure and Applied Logic*, 56, pp 183-220, 1992,

R. Brandom, *Making it explicit*, Harvard Press, 1994, trad. franç. *Rendre explicite*, ed. du Cerf, 2010,

R. Brandom, *Articulating Reasons*, Harvard Press, 2000, trad. franç. L'articulation des raisons, ed. du Cerf, 2009,

N. G. de Bruijn, « A survey of the project Automath », in J. P. Seldin & J.R. Hindley (eds.), To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, Academic press, 1980, pp. 579--606,

J. Cavaillès, *Sur la logique et la théorie de la science*, Presses Universitaires de France, Paris, 1960,

H. B. Curry & R. Feys, *Combinatory Logic*, North-Holland, 1958,

V. Danos & L. Régnier, « The Structure of Multiplicatives », *Archives for Mathematical Logic* n° 28, Springer, pp. 181--203, 1989,

O. Ducrot, postface à Paul Henry : *Le mauvais outils, langue, sujet, discours*, ed. Klincksieck, 1977,

M. Dummett, *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press, 1977,

P. Engel, « Achille, la tortue et le problème de la connaissance logique », *Al-Mukhatabat*, n°1, année 1, janvier 2012,

W. Felscher, « Dialogues as a Foundation for Intuitionistic Logic » in *Handbook of Philosophical Logic*, Gabbay and Guenthner eds. Kluwer, 1986,

J.-Y. Girard, « Linear Logic », *Theoretical Computer Science*, n° 50, 1987,

J.-Y. Girard, Y. Lafont & P. Taylor, *Proofs and Types*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989,

J.-Y. Girard, « Towards a geometry of interaction », in J. Gray and A. Scedrov (eds), *Categories in Computer Sciences and Logic*, American Mathematical Society, vol. 92, pp. 69--108, Providence, 1989,

J.-Y. Girard, « Geometry of Interaction III: accommodating the additives » in J-Y. Girard, Y. Lafont et L. Regnier (eds) *Advances in Linear Logic*, Cambridge University Press, pp. 329--389,1995,

J.-Y. Girard, « On the Meaning of Logical Rules-I » in *Computational Logic*, U. Berger and H. Schwichtenberg eds. Springer-Verlag, 1999,

J.-Y. Girard, « Locus Solum », *Mathematical Structures in Computer Science* 11, pp. 301-506, 2001,

J.-Y. Girard, « From Foundations to Ludics », *Bulletin of Symbolic Logic* 09, pp. 131-168, 2003, J.-Y. Girard, *Le Point Aveugle*, vol. I , II, Hermann, Paris, 2006,

J.-Y. Girard, « La logique comme géométrie du cognitif » in J-B. Joinet (ed.) *Logique, dynamique et cognition*, Publications de la Sorbonne, pp. 15--29, Paris, 2007,

J.-Y. Girard, « Transcendental Syntax 2.0 », notes du cours donné à « Logique et Interaction 2012 «, Marseille, 6-10 février 2012

J. Hintikka & G. Sandu, « Game Theoretical Semantics », in J. Van Benthem and A. ter Meulen *Handbook of Logic and Language*, chap. 6, Elsevier, 1997,

W. A. Howard, « The Formulae-as-Types Notion of Construction », in J. P. Seldin & J.R. Hindley (eds.), *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Academic press, 1980, pp. 479--490,

F. Jacques, *Dialogiques : recherches logiques sur le dialogue*, Presses Universitaires de France, Paris, 1979,

J-B. Joinet, *Logique et interaction*, mémoire pour l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7 - Diderot, département « Histoire et Philosophie des Sciences «, 12 décembre 2007.

I. Kant, *Cours de Logique*, ed. Cassirer, t.VIII,

L. Keiff, *Pour un pluralisme logique*, thèse de doctorat, Université de Lille III.

R. Cann, R. Kempson & L. Marten. *The Dynamics of Language, an introduction*, Elsevier, Syntax and Semantics volume 35, 2005,

A. Lecomte, *Logic, Meaning and Ludics*, Imperial College Press, 2011,

P. Livet, « Espace, négation, ontologie et logique linéaire », in J-B. Joinet & S. Tronçon eds, *Ouvrir la logique au monde*, ed. Hermann – Cerisy, 2009, pp. 245 - 260,

K. Lorenz, *Arithmetik und Logik als Spiele*, Dissertation, Universität Kiel, 1961,

P. Lorenzen, *Logik und Agon*, Atti. Congr. Internat. di Filosofia, 4, pp187-194, 1960

P. Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis, Naples, 1984,

R. Moot & C. Retoré, *The Logic of Categorial Grammars*, Springer Folli, 2012, A-V. Pietarinen, *Game Theory and Linguistic Meaning*, Elsevier, 2007,

S. Rahman & L. Keiff, « How to be a dialogician » in Vanderveken, D. (ed.) *Logic, Thought and Action*, Springer, pp. 359--408, 2005.

J. Stoy, *Denotational Semantics: the Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory*, MIT Press, Cambridge, Mass. 1977

Ludwig Wittgenstein, *Philosophische Untersuchungen*, Blackwell, 1953.