DU STYLE EN MATHEMATIQUES

Pierre Gapenne

(Université Jules Verne de Picardie, Amiens)

Résumé

D'Euclide à Desargues et de Descartes à Leibniz : que la notion de style en mathématiques (style euclidien, style arguésien et style vectoriel) est une notion qui nous amène à prendre progressivement conscience de la coémergence survenante de formes qui nous engagent dans des relations productives dans lesquelles le sujet et l'objet participent également à la détermination des propriétés et des qualités respectives de ces relations. La forme complètement ouverte de la relation s'oppose ainsi d'un côté à la forme fermée d'une désignation définitive du côté de la référence à l'objet et de l'autre à la forme fermée dans l'identité figée et rigide du côté du sujet.

ملخّص :

من اقليدس الى دزارق و من ديكارت الى ليبنتز: أن يكون مفهوم الأسلوب في الرياضيات (اقليدس ، اسلوب دزارق، أسلوب الموجّهات..) مفهوما يقودنا الى الاهتمام بالانبثاق الحاصل للصور التي تلزمنا بعلاقات جديدة يكون فيها الذات و الموضوع متشاركين على حدّ السواء في تعيين خواص و صفات هذه العلاقات . على هذا الأساس فإنّ الشكل المنفتح تماما للعلاقة يتعارض مع الشكل المنغلق للاشارة النهائية من ناحية مرجع الموضوع و يتعارض من جهة اخرى مع الشكل المنغلق للهويّة الثابتة و الجامدة من ناحية الذات.

Abstract :

From Euclid to Desargues and from Descartes to Leibniz: the fact that the notion of style in Mathematics (Euclidian style, style of Desargues, Vectorial style) is leading us to realize progressively that the emergence occurring with forms which is engaging us within productive relations and making the sujet and the object participating equally to the determination of the properties and qualities respectively related to those relations. The form being completely open of the relation is in opposition first to the closed form of the definitive designation as it concerns with the reference to object, and secondly to the closed form in the fixed and strict identity as it concerns with the sujet.

Mobiliser les conditions de possibilité et Probabiliser les conditions d'apparition d'un champ de conscience autour d'une thématique, sont les deux premiers moments d'un traitement philosophique d'un problème (obstacle) qui se présente à notre expérience ... Ce n'est pas tant le possible qui est la mesure du réel que le probable, c'est-à-dire le compossible ... Selon la conception que l'on se forge du possible et de l'impossible, de l'espérance de quelque chose de souhaitable ou de l'inespéré de quelque chose de redoutable mais d'attendu et d'inévitable, du contingent, de l'accidentel, du fortuit et de l'aléatoire, du peu ou du très probable et de l'improbable, du vraisemblable et de l'invraisemblable, du crédible et de l'incroyable, la notion d'expérience varie ... Non seulement des semblables mais encore des semblables semblablement posés ... Le principe de l'ordre général des êtres est comparable à la manière dont une figure se perd dans une autre : l'ellipse dans la parabole, le polygone régulier dans la courbe, l'inégal dans l'égal, le mouvement dans le repos ... Ce principe de l'ordre général se règle sur l'entr'expression des êtres et des choses compossibles ... Ce que l'expression est à l'entr'expression, le possible l'est au compossible ...

« Descartes ne dit pas autre chose » : par ces mots, Leibniz prévenait qu'il suivait le vocabulaire cartésien. Mais alors même que Leibniz prétendait en user à la cartésienne, un mot passant de l'un à l'autre, changeait de signification : voici que le contenu de l'Idée de nombre elle-même devient actif et qu'il enveloppe l'infini, qu'il exprime une Idée du monde intelligible qui se rattache à la réminiscence du Ménon et qu'il s'oppose point par point à la nature de l'Idée selon Descartes. La méthode de Descartes souffre aux yeux de Leibniz d'une ambiguïté ; d'une part, elle opère une hygiène, une propédeutique, une conversion de l'esprit qui vise à un but et à un idéal de la connaissance, d'autre part elle affirme la décision d'aller au vrai avec toute son âme et elle fixe un style de pensée : << les longues chaînes de raisons dont les géomètres ont coutume de se servir, donnent occasion à Descartes de remarquer la certitude qui s'attache à un mouvement continu et ininterrompu de la pensée >>. Pour Descartes, la vérité n'est pas ce que << partout, de tout temps, on a toujours cru >>, elle est ce qui est évident à un esprit attentif. La nécessité nous élève à les premières choses qu'on peut connaître en philosophant par ordre. Nécessité, car le vrai usage des mathématiques habitue l'esprit à distinguer les raisonnements vrais et démonstratifs de ceux qui sont probables et le probable est ici équivalent du faux. Pour Leibniz, plutôt que de rejeter les opinions probables, il faut en faire la science : l'estime de la vraisemblance des apparences, il la thématise sur l'exemple de la logique formelle et du calcul des probabilités à partir de la nature même des choses. D'une conception à l'autre, la valeur même de la vraisemblance change. La vraisemblance ne s'estime pas seulement sur les données de l'analyse : il faut aussi joindre à cette analyse une tendance à croire qui donne du poids aux raisons. Cette tendance, variant selon les de grés de l'essence, exprime en nous la praetentio ad existentiam du vraisemblable. L'art d'estimer les vérisimilitudes peut établir une logique du probable et de l'improbable. Dès 1666, avec la Disputatio arithmetica de Complexionibus, mais surtout avec le De Arte Combinatoria, s'affirme chez Leibniz l'arithmétisme qui le distingue de Descartes : on y trouve un traité des permutations (variationes), en particulier des permutations circulaires, et des combinaisons (complexiones), qui ouvre la voie du calcul des probabilités. De la nature, nous ne connaissons que les coutumes (habitudines), ce qui ne suffit pas pour une prévision nécessaire de l'avenir : nous composons par conjecture des notions probables à l'aide de l'analogie. Descartes compare nos interrogations sur la nature au déchiffrement d'un cryptogramme, Leibniz fait du décryptement une Combinatoire qui elle-même est déduite de l'analogie.

Dans sa définition des mathématiques comme science de l'ordre et de la mesure, Descartes semble prolonger la dissociation euclidienne de la grandeur et de l'être géométrique, il désigne d'un côté l'objet de la science et son contenu et de l'autre la procédure de la science et sa forme. Tandis que la géométrie cartésienne produit des modèles d'intelligibilité de l'étendue, la géométrie arguésienne présente une méthode des transformations projectives. Qu'est-ce à dire ? Comme l'affirme si bien Gilles-Gaston Granger dans Essai d'une philosophie du style 1. Desargues bien avant Pascal ou Leibniz est un anticartésien par excellence : il ne se contente pas dans ses analyses des figures géométriques << de diviser chacune des difficultés qu'il examine en autant de parcelles qu'il se peut et qui sont requises pour les mieux résoudre >>, il fait voir et valoir << la raison des effets par un style >>. Pour saisir ce qui est en œuvre dans la méthode des transformations projectives, nous devons introduire l'Idée d'un procédé de transformation : l'anamorphose. L'anamorphose, mère de l'illusion se charge aussi de nous faire découvrir des proportions et des vérités : le développement de la technique perspectiviste donne de nouveaux moyens à tous les artifices de représentations. Les lois de l'optique et de la géométrie sont utilisées pour corriger, pour amplifier ou pour amenuiser la vision. Avec l'ouverture de l'angle euclidien, les corps grandissent, avec sa fermeture, ils diminuent : les perspectives ralenties et accélérées créent des effets qui déforment la vision. Ainsi, on peut formuler l’expression de raccourcis perspectifs ou échelles de profondeur. Autrement dit, son analyse débouche sur l’introduction d’un opérateur de synthèse.

Dans cet ouvrage, Granger distingue trois styles de mathématiques :

- le style euclidien : le style euclidien se présente d’abord sous une forme rigide et fixe qui s’impose avec force au contenu qu’elle exprime.

- le style arguésien : dans ce style, la forme épouse plus étroitement son contenu en faisant intervenir notamment la notion de différenciation et de dérivation des formes les unes des autres.

- le style vectoriel : dans ce style, formes et contenus sont réversibles ce qui leur confère une plasticité bien supérieure.

a) La beauté du style euclidien s’oppose à celle des styles axiomatiques modernes un peu comme la beauté symbolique des tombeauxet des statuts de l’Egypte s’oppose à la beauté classique des temples et des figures de la Grèce: en effet, ce style euclidien se caractérise d’abord par la distinction qu’il opère entre ce qui est donné et ce qui est cherché, il secaractérise ensuite par une démonstration qui établit l’inférence entre ce qui est donné et ce qui est cherché: ce qui manque aux données pour découvrir ce que l’on cherche. L’axiomatique euclidienne dresse le schéma des renvois auxquels chaque démonstration donne lieu : ainsi, la mathématique euclidienne superpose à l’ordre sémantique des définitions des figures (qui définissent des identités d’objets), un ordre déductif des démonstrations qui définissent des identités de procédures) : a sert à démontrer b. La logique qui correspond à ce style euclidien, c'est la logique des propositions. Les inférences qui sont mises en œuvre dans cette logique s'appuient sur les significations (substances) d'un langage et leurs synonymies.

b) S’agissant de la géométrie que Desargues développe dans le Brouillon projet d’une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan, nous pouvons sans doute la caractériser le mieux par l’emploi qu’elle fait d’un opérateur de synthèse à savoir les coniques. Cet opérateur de synthèse nous est fourni par la notion d’involution, qui elle-même est étroitement liée à celle de division harmonique. Par cette notion, Desargues désigne à notre attention la valeur heuristique des coniques : ainsi, pour le cercle, il démontre les propriétés relatives aux polaires et aux tangentes de celui-ci ; ensuite, par une projection, il transforme ce cercle en une courbe conique dont il peut déduire les propriétés de celles du cercle initial. Les propriétés des figures géométriques ainsi sont interprétées en les mettant en perspective à partir d'une origine (d'un archétype) par leurs projections sur la section plane d'un cône 2. Dans cette perspective, les mathématiques se présentent comme une science des formes des objets en tant qu'ils sont susceptibles de différences. Nous avons affaire ici à une logique des prédicats dans laquelle le statut des inférences est une fonction qui met en relation un élément constant, << fermé sur soi >>, << saturé >> et un élément variable, << ouvert >>, << non saturé >>.

c) Quant au style vectoriel, il se spécifie non plus comme la schématisation intuitive d'un donné, mais comme l'auto-engendrement de ses objets à partir de combinatoires de lois de composition de modèles : les notions de groupes, d'anneaux et d'espaces vectoriels construisent des hiérarchies d'objets mathématiques. Les règles d'engendrement des objets qui peuplent ces ensembles déterminent également les propriétés de ces objets. Ces ensembles de règles forment des structures : la notion de structure désigne une configuration de liaisons logiques où ce qui est visé comme forme est susceptible de devenir un fond (réversibilité des opérations). Ainsi, l'identité des objets est déterminée par l'identité de la structure à laquelle ils appartiennent. Le style vectoriel souligne par conséquent les opérations de transformation qui permettent de passer d'une classe d'objet à une autre : de ce point de vue, les mathématiques pourront être définies comme la science de l'ordre dans la progression. Ainsi, ce souci d'établir une genèse hiérarchique rationnelle des êtres mathématiques s'inscrit il dans la perspective du projet leibnizien d'une charactéristique universelle : on ne s'étonnera pas qu'une telle conception mette en avant de préférence les notions d'équivalence et de congruence plutôt que celle d'égalité utilisée par les mathématiques plus traditionnelles. Dans le style vectoriel, ce qui est devenu déterminant, c'est la confrontation des contextes d'une modalité << de re >> à une modalité << de dicto >>. Dans une telle optique, << être, c'est être la valeur d'une variable >> : il n'y a plus d'éléments saturés ; dans les interactions des intersubjectivités, tout est susceptible de variations, y compris les caractéristiques des individus en présence. Voir Jean-Gérard Rossi, La philosophie analytique, p 14, p 102, p 109.

Descartes pratique le doute et la certitude ne commence qu'avec le Cogito qui porte en lui la règle d'évidence. Le mouvement ne peut donc avoir lieu que du connaître à l'être, de l'unité du Cogito à la pluralité dont il institue l'ordre. Leibniz avec la tradition procède de l'être au connaître. Pour Descartes, l'idée intuitive est une réalité singulière qui diversement considérée, explicite des aspects différents : l'angle, la ligne, le nombre, la figure. La multiplicité concrète des Idées en tant qu'elles sont pensées ou pensables l'une sans l'autre renvoie à la ratio essendi. La multiplicité abstraite renvoie qui concerne les modes et les diverses façons dont nous considérons une chose, renvoie à la ratio cognoscendi. Cette doctrine leibnizienne renferme d'une part une théorie cardinale, orientée vers l'être, vers le nombre-objet de la pensée, pour laquelle l'unité doit se concevoir comme l'élément d'un ensemble qui présuppose la notion d'espace ; d'autre part, une théorie ordinale orientée vers le connaître, vers les opérations de l'esprit pour laquelle l'unité de vient le principe de la formation du nombre. D'une part Aristote et de l'autre Platon. Ainsi la quantité est un ensemble d'éléments de ceci mais comme le ceci enveloppe la qualité, la quantité devient le discernement du semblable, ce qui revient à dire que contrairement aux perspectives du dualisme cartésien confondant quantité et matière, la qualité est pour Leibniz plus primitive que la quantité et tend à l'attirer à elle. Et bien entendu, le contraste entre nos deux auteurs quant à l'attention qu'ils accordent à la notion de nombre et à la manière dont ils le conçoivent, se réfléchit dans leurs mathématiques et dans leurs méthodes. Mathématiques et méthode cartésienne doivent peu à l'arithmétique et presque tout à l'intuition de l'étendue et aux longues chaînes de raisons des géomètres. Le nombre ne sert qu'à mesurer ; les chiffres lettres et symboles qui traduisent cette mesure ne sont que des signes plus ou moins commodes, mais aussi extrinsèques à la chose nombrée (matérielle ou idéale) et à l'activité opératoire que le français est ou que le bas-breton est extrinsèque à l'objet de la pensée et à la pensée elle-même. Mais Leibniz a de l'algorithme une conception plus moderne : les chiffres lettres et symboles expriment à la fois le nombré et le (dé)nombrement, c'est-à-dire soutiennent avec l'un et avec l'autre une relation intrinsèque, en sorte que nous pouvons légitimement raisonner sur les << caractères >>. Loin de s'arrêter au seul aspect quantitatif des nombres, Leibniz s'intéresse surtout à leur aspect qualitatif : leur composition, leur structure, leur ordre de coexistence. Ainsi, tout nombre est un rapport et tout rapport est un nombre : en cessant de considérer le nombre comme un objet statique de la pensée, un terme, pour le considérer comme un rapport entre deux termes, nous passons à une définition opératoire du nombre. Les opérations arithmétiques ne sont rien d'autre que les méthodes synthétiques et analytiques de traiter des rapports de nombres qui déterminent des nombres. (P 203, 253, Leibniz critique de Descartes).

1) Gilles-Gaston GRANGER : Essai d'une philosophie du style, Editions Odile Jacob, 1968.

2) François RUSSO : article Géométrie de l'Encyclopédie Universalis, 1970.