DES MODES D'EXISTENCE EN LOGIQUE

En Hommage à Paul Gochet

Denis Vernant

(Université de Grenoble)

Résumé

Sont examinés ici la signification et le mode de fonctionnement de la quantification existentielle dans ses aspects syntaxique, sémantique et pragmatique en logique standard sous ses présentations à la fois classique et dialogique.

ملخّص

تتمّ في هذا المقال دراسة معنى و ضرب اشتغال عمليّة التسوير الوجودي في تجليّاتها النحوية و الدلالية و التداولية في المنطق سواء تعلّق الأمر بالمنطق الكلاسيكي أم بالمنطق الحواري.

Abstract

This paper focuses on the meaning and the functionality of existential quantification under its syntactical and semantically and pragmatically aspects in standard logic as it's presented into classical logic and dialogical one.

Comme tout logicien de ma génération, j'ai eu l'occasion de rencontrer Paul Gochet puis le plaisir de le connaître mieux lorsqu'avec Jacques Riche nous nous sommes occupés de la recension des œuvres des philosophes anglo-saxons des XIX-XX^{e} siècles pour l'*Encyclopédie Philosophique Universelle* que dirigea André Jacob aux PUF. J'ai pu alors apprécier un homme affable alliant – fait rare de nos jours – une grande compétence à une parfaite modestie. De sa thèse sur le statut de la proposition à ses travaux sur Quine, la question ontologique a toujours tenu une grande place dans ses préoccupations logiciennes. C'est pourquoi en guise d'ultime hommage, nous voudrions proposer dans ce qui suit une réflexion sur les modes d'existence en logique. Nous traiterons la question en logique standard sous ses présentations à la fois classique et dialogique, en examinant ses aspects syntaxiques et sémantiques mais aussi pragmatiques. D'où un parcours qui nous conduira à revenir sur la définition du quantificateur existentiel, à rappeler le traitement de l'attribution d'existence, l'import des propositions, l'engagement existentiel pour enfin dégager les modalités de sélection et de choix imposées par la quantification existentielle.

1. Généralité et quantificateur existentiel

Alors que Russell reste encore en 1903 englué dans les distinctions byzantines de sa théorie initiale de la dénotation,<1> Gottlob Frege introduit le quantificateur existentiel dès 1879 dans sa *Begriffsschrift*. À la fin de la première partie portant sur « L'explication des symboles », Frege traite de la généralité et introduit la généralité totale en recourant à une lettre gothique au creux du trait horizontal de contenu :

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; M(\mathfrak{a})$$

Il l'interprète comme signifiant « Quel que soit ».<2>

Il aborde ensuite la généralité partielle à partir de la négation totale d'une proposition universelle :

$$\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\; M(\mathfrak{a})$$

et l'interprète comme signifiant « Il y a des » et « Au moins un ».<3>

Cette stratégie correspond à celle adoptée en 1910 dans les *Principia Mathematica* (*PM*) pour définir la quantification existentielle :

$$\exists(x)Fx =_{Df} \neg(x)\neg Fx. \text{ <4>}$$

---

(1) Cf. notre *Philosophie mathématique de Bertrand Russell*, chap. 3, § 9-11. Russell adopta la quantification logique de façon informelle dans son analyse des descriptions, cf. « On Denoting » et *Philosophie mathématique de Bertrand Russell* p. 97, note 1 & p. 182-3. Il l'introduit de façon formelle en 1906 dans « The Theory of Implication ».

(2)Cf. *Idéographie*, § 11, p. 36.

(3)Cf. *ibidem*, § 12, p. 37. Frege n'introduit donc pas explicitement le quantificateur existentiel.

(4) *PM*, le *9 introduit les quantifications universelles et existentielles comme deux *idées primitives* (cf. p. 127). Mais le paragraphe suivant propose une « méthode alternative » qui, admettant pour idée primitive la négation, permet de définir la quantification existentielle à partir de l'universelle, cf. *10.01, p. 140. Cette définition, qui autorise l'intertraductibilité des quantificateurs, n'est autre que l'application de la loi de dualité au couple de quantificateurs universel/existentiel, cf. notre *Introduction à la logique standard*, § 2.2.5.

Plus tard, Frege reviendra sur cette opération fondamentale pour la caractériser comme une fonction de fonction, donc une « fonction de second degré » <5>. L'existence logique est un concept de « second degré », une propriété [*Eigenschaft*] applicable au seul concept et non un caractère [*Merkmal*] d'un concept valant pour ses objets <6>. Une proposition dite « existentielle » ne statue pas sur un objet, mais sur la fonction en jeu dont elle dit qu'elle doit être satisfaite par *au moins un* objet du domaine. On comprend alors que la quantification existentielle d'un objet désigné par son nom propre s'avère dénuée de sens (*unsinnig*). Si la lettre de constante *a* désigne un objet *singulier*, l'écriture $\exists a$, interprétée comme « Il y a au moins un *a* » est incohérente.

Dès lors, la quantification existentielle peut se définir à partir de l'idée de satisfaction partielle de la fonction. On a :

$$\exists(x)\mathrm{F}x =_{\mathrm{Df}} \mathrm{F}a \vee \mathrm{F}b \vee \mathrm{F}c, \textit{ etc.}$$ <7>

Dire qu'« au moins un *x* satisfait la fonction F », c'est dire que cette fonction est satisfaite par *a* ou pas *b* ou par *c*, sans spécifier lequel et sans en exclure aucun *a priori*.

2. L'attribution d'existence

Devenues classiques, ces définitions sont cependant bien loin d'épuiser la signification et d'expliquer le mode de fonctionnement du quantificateur existentiel.

Il importe d'abord de lever l'ambiguïté du terme d'existentiel accolé par commodité à l'opération logique de restriction de la généralité. Comme on l'a vu, la quantification, en tant qu'opération de « second degré », ne saurait s'appliquer sensément aux *objets* frégéens ou aux *individus* russelliens.

---

(5) Cf. « Fonction et concept », p. 98.
(6) Cf. *Les Fondements de l'arithmétique*, § 53, p. 180-181 où Frege rapproche les concepts logiques de nombre et d'existence : « L'unicité, pas plus que l'existence de Dieu, n'est un caractère du concept "Dieu " ».
(7) Dans « Sur l'algèbre de la logique », p. 6, Peirce notait qu'il ne pouvait y avoir qu'une analogie entre quantification existentielle et somme « car les individus de l'univers peuvent être en quantité indénombrable ». Ramsey, qui distingue logique et gnoséologie, admet que la formule puisse valoir pour des disjonctions *infinies*, cf. notre article « L'interprétation du formalisme logique, P. F. Ramsey lecteur des *Principia Mathematica* », p. 150.

Comment alors traiter les phrases du langage courant du type « *a* existe » si l'écriture $\exists a$ est exclue de l'idéographie logique ?

On ne sait pas assez que Russell, partant les auteurs des *PM*, apportent une réponse précise à cette question délicate en fournissant un traitement logique de *l'attribution purement langagière d'existence*. Le concept d'attribution d'existence constitue un acquis majeur de la théorie des descriptions définies de 1905. Il reçoit une formalisation dans les *Principia* au chapitre 3 de l'introduction intitulé : « les symboles incomplets ».

La théorie russellienne des descriptions définies de 1905 utilise la nouvelle théorie de la quantification pour opérer une analyse réductrice qui, dissovant l'*apparence grammaticale* de toute description définie, s'avère non pas un authentique nom propre, mais une *construction discursive*, purement descriptive <8>. Dans un jugement complet, la description définie qui en constitue le *sujet apparent* n'a plus valeur de nom propre, mais simplement de construction conceptuelle qui est « démembrée » et dont les constituants « contribuent à la signification de la proposition entière » <9>. Ainsi, le jugement « L'actuel Roi de France est chauve » s'*analyse* en :

1°) « Il existe *au moins* un individu qui est actuellement Roi de France (condition d'existence) ;
2°) « Il existe *au plus* un individu qui est actuellement Roi de France » (condition d'unicité) ;
3°) « Il est chauve » (qualification contextuelle).

Ce qui se traduit logiquement dans les *PM* par :

$$C\{(\iota x)Ax\} =_{Df} \exists y\{(x)[Ax \equiv (x = y)] \circ Cy\}$$

où $A(x)$ = « est actuellement Roi de France » et $C(x)$ = « est chauve ».

---

(8) Cf. notre *Philosophie mathématique de B. Russell*, § 22 à 24.
(9) Cf. « De la dénotation », p. 205 & p. 213.

En toute généralité, la *définition contextuelle d'une description définie* est la suivante *14.01 :

$$\psi\{(\iota x)\ \Phi x\} =_{Df} \exists y\{(x)[\Phi x \equiv (x = y)] \circ \psi y\}.$$

Dans les *Principia*, les descriptions définies constituent le modèle des *symboles incomplets*, purement syncatégorématiques : « Si le sujet grammatical d'une proposition peut être supposé ne pas exister sans rendre la proposition dépourvue de sens, il est évident que le sujet grammatical n'est pas un nom propre et que, donc, dans tous les cas, la proposition doit pouvoir être analysée de telle manière que ce qui en était le sujet grammatical ait disparu » <10>.

Entre autres conséquences importantes, cette analyse logique des descriptions définies établit l'inanité de l'*argument ontologique*. L'existence ne peut *a priori* être prédiquée de Dieu. Dans le jugement d'existence « Dieu existe », le contexte propositionnel est constitué non d'une qualification, mais d'une *attribution langagière d'existence*. Ce contexte particulier se traduit dans les *Principia* par le nouveau symbole E! qui, loin de constituer un nouvel opérateur logique, s'avère *totalement réductible* à la quantification existentielle. L'attribution d'existence se réduit logiquement à se demander si on peut trouver un unique individu du monde qui possède telle propriété. Le symbole E! ne fait qu'expliciter la condition d'existence qui, avec celle d'unicité, est implicitement présente dans toute description définie. Les deux conditions « prises ensemble sont équivalentes à : $(x)(\exists c)[\Phi x \equiv (x = c)]$ que nous définissons comme : $E!(\iota x)(\Phi x)$. *Ainsi "*$E!(\iota x)(\Phi x)$*" doit faire partie de toute proposition qui porte sur* $(\iota x)(\Phi x)$ » <11>. On a alors la définition *14.02 :

$$E!\{(\iota x)\ \Phi x\} =_{Df} \exists y(x)[\Phi x \equiv (x = y)].$$

---

(10) *PM*, Intro., chap. 3, trad. fr. p. 309-310.
*(11) PM**, Intro., chap. 3, (1), trad. fr. p. 312, nous soulignons.

Dans le *definiens* de cette nouvelle définition contextuelle, le symbole d'*attribution d'existence* E! (que Russell lisait *E Shriek*) a purement et simplement disparu au profit d'une simple conjonction logique des deux conditions d'existence et d'unicité, c'est-à-dire d'une quantification existentielle sur une unique valeur *y*. L'attribution d'existence est *impliquée* par toute proposition qui contient une description définie. Aussi peut-on écrire *14.21 :

$$\vdash [\psi (\imath x)(\Phi x) \rightarrow E!(\imath x)(\Phi x)].$$

Là encore, cette attribution d'existence ne fait qu'entériner l'incomplétude de tout symbole de description définie. De là découlent tout à la fois les restrictions que Russell impose à l'attribution d'existence et les limitations qui régissent l'usage du symbole de description définie. En toute rigueur, l'attribution d'existence ne peut valoir que dans le cas de symboles incomplets. L'*existence logique* est déniée aux individus signifiés par les noms propres pour la réserver aux seules descriptions définies. Une telle différence est conforme à la théorie des types qui exige de séparer les individus – type 0 – des fonctions – type 1. Il serait donc de mauvaise « grammaire » d'attribuer l'existence à un individu nommé directement par un authentique nom propre : « Quand, dans le langage ordinaire ou en philosophie, quelque chose est dit "exister", c'est toujours quelque chose de *décrit*, ce n'est pas quelque chose d'immédiatement présenté, comme une saveur ou une tache de couleur, mais quelque chose comme "la matière" ou "l'esprit" ou "Homère" (signifiant "L'auteur des poèmes homériques"), qui est connu par description comme "Le tel-et-tel", et est donc de la forme $(\imath x)(\Phi x)$ » <12>.

Attribuer l'existence au cercle carré revient simplement à assumer que la fonction « *x* est circulaire et carré » peut être satisfaite par un unique individu. L'existence logique conditionne non la référence directe à un objet, mais la vérité d'une qualification conceptuelle.

---

(12) *PM*, *14, p. 174-5.

3. L'import existentiel

Cela étant, la logique contemporaine opère un *progrès analytique* par rapport à la logique traditionnelle dans la mesure où elle réserve explicitement l'import existentiel à la seule proposition existentielle. On se souvient en effet qu'Aristote assignait aussi bien à la proposition universelle en *A* qu'à la proposition particulière en *I* un même import existentiel dans la mesure où il *présupposait* que l'on parle toujours d'individus existants.

Entérinant la lecture moderne inaugurée notamment par Boole et Venn <13>, Russell fait de la traditionnelle universelle affirmative en *A* du genre « Tous les humains sont mortels » une simple *implication formelle*, c'est-à-dire une proposition purement hypothétique traduite par la formule $(x)(Hx \rightarrow Mx)$. Celle-ci porte donc sur tout individu possible, et elle exprime en fait un simple rapport d'implication entre prédicats. En vertu de la règle selon laquelle du Faux on peut déduire ce que l'on veut (*ex falso sequitur quodlibet*), la proposition « Quel que soit *x*, si *x* est un humain, alors *x* est mortel » est vraie *même s'il n'existe pas d'humains*. L'antécédent étant faux, l'implication est vraie <14>.

Il en résulte que *l'implication n'impose aucune existence*. On retrouve ici la thèse, héritée de Moore, de la *nature non existentielle des propositions universelles*, confirmée dès 1905 par Russell : « Mais *A* [Tout *S* est *P*] et *E* [Aucun *S* n'est *P*] ne requièrent l'existence ni de *S* ni de *P* ; car une [proposition] hypothétique est vraie même quand son hypothèse est fausse, si bien que si "*x* est un *S*" est toujours fausse, "Tout *S* est *P*" et "Aucun *S* n'est *P*" seront toutes les deux vraies quel que puisse être *P* » <15>.

Cette neutralisation existentielle des propositions universelles explique qu'à l'inverse de la syllogistique d'inspiration aristotélicienne la logique des *Principia* ne reconnaisse pas parmi ses théorèmes la traditionnelle *règle de subalternation* selon laquelle de « Tous les *S* sont *P* » l'on peut inférer « Quelques *S* sont *P* ».

---

(13) Cf. notre *Introduction à la logique standard*, § 2.1.5.
(14) Ceci fonde la possibilité du raisonnement par l'absurde, cf. notre *Introduction à la philosophie mathématique*, chap. 15, p. 304.
(15) Cf. « The Existential Import of Propositions », p. 400.

Ce refus de conclure de l'universalité à l'existence rend caduc tous les syllogismes subalternes, tels les syllogismes en *Darapti*. La forme : « Tous les *A* sont *B*, Tous les *A* sont *C*, donc quelques *B* sont *C* » n'est plus licite dès l'instant où l'on considère que la prémisse n'assure plus l'existence des *A*. C'est la seule manière d'éviter certaines erreurs grossières auxquelles conduisait l'interprétation classique du syllogisme. Il suffit pour s'en convaincre de prendre un exemple où les *A* n'existent pas, tel « Toutes les chimères sont des animaux, et toutes les chimères crachent des flammes, donc quelques animaux crachent des flammes » <16>.

Le terme d'*existentielle* appliqué par Russell aux propositions en *I* (par opposition à *particulière*) indique qu'à la différence des propositions universelles, les propositions existentielles mettent en jeu l'existence. C'est en ce sens que nous parlons d'*import existentiel*. Il s'agit bien cette fois, non plus simplement d'un pur rapport d'implication entre concepts, mais bien d'*importer* une valeur particulière qui rend vraie la fonction. L'assertion existentielle $\exists x\mathrm{H}(x)$, qui se traduit dès lors par « Il existe une valeur de *x* telle que *x* est un humain », doit pouvoir être vérifiée par l'assertion de H(*a*), où *a* est le nom propre logique d'une valeur d'individu particulière. Cet individu, selon Russell, *doit faire partie des individus réels <17>*.

4. Ontologie, engagement ontologique et interprétation sémantique

Paul Gochet, corrigeant une mésinterprétation d'Hintikka, insiste à juste titre sur la nécessité de faire le départ entre l'ontologie d'une théorie<18> et ses engagements ontologiques <19>.

---

(16) « La philosophie de l'atomisme logique », p. 389.

(17) Selon sa conception « universaliste » de la logique et référentielle de la signification, Russell propose une interprétation « objectuelle » de la quantification et non « substitutionnelle », nous y revenons dans ce qui suit.

(18)Traitant de l'existence *en logique*, nous n'aborderons pas la thèse quinienne selon laquelle l'« enrégimentement » logique permet de rendre compte des engagements *des langues naturelles*.

(19) Cf. Paul Gochet, *Ascent to Truth,* chap. 3, § 2, p. 67-71.

En effet, l'usage d'une variable liée dans une proposition quantifiée met en jeu l'ontologie de la théorie. Par exemple, la proposition universelle (x) (x est un chat) suppose que la théorie qui assume cette proposition admette un domaine d'individu, donc une *ontologie* composé de chats. Mais la même théorie ne se trouve *engagée ontologiquement* sur l'existence de chats que si elle assume la vérité de la proposition existentiellement quantifiée $\exists x$ (x est un chat) <20>. Dès lors : « l'existence est ce qu'exprime la quantification existentielle. Il y a des choses de l'espèce F si et seulement si $\exists x(\mathrm{F}x)$. Cela est aussi vain qu'indiscutable, attendu que c'est la façon dont on explique d'entrée de jeu la notation symbolique de la quantification » <21>.

Reprenant la stratégie réductrice inaugurée par Russell avec sa fameuse théorie des descriptions définies et l'étendant à tous les noms propres, Quine n'admet plus pour seul canal de référence que la variable<22>. L'*engagement existentiel ne vaut plus alors que lorsqu'on assume la quantification existentielle* <*23*>. Celle-ci requiert alors *l'instanciation existentielle* suivante :

$$\exists x(\mathrm{F}x) \rightarrow \mathrm{F}a.<24>$$

Autrement dit, la quantification existentielle engage à assumer la vérité de la proposition singulière F*a*. Reste alors à déterminer précisément le contenu d'un tel engagement. Bien que Quine ne partage pas la conception universaliste de Russell qui suppose que les valeurs d'individu valent pour tout individu existant et qu'il admette une restriction du domaine d'individu, Quine partage sa conception référentielle du sens qui le conduit à

---

(20) L'engagement porte sur un individu qui se trouve être un chat et non sur le prédicat « être un chat » puisqu'il n'est pas quantifié, cf. Gochet, « L'être selon Quine », p.191-192.
(21) Quine, *Relativité de l'ontologie et autres essais*, p. 113.
(22) Cf. notre article « Quine & Russell, aspects sémantiques, ontologiques et logiques », § 2.2. Voir aussi Saloua Chatti, *Le Problème de la référence chez Quine*, chap. 4, p. 353-377.
(23) Se pose alors la question du statut ontologique des fonctions, des classes, *etc*. si on quantifie sur eux. Pour son traitement chez Quine, cf. notre article « Quine & Russell, aspects sémantiques, ontologiques et logiques », § 2.2.2 à 2.2.4.
(24) Lorsqu'on travaille *a priori*, la constante *a* doit être inédite. Sur le fonctionnement précis de la règle d'instanciation, cf. notre *Introduction à la logique standard*, § 2.2.2.2.2.

une *interprétation référentielle*, partant objectuelle, de la quantification existentielle. Il ne peut admettre que Fa fasse sens, puisse avoir une quelconque valeur de vérité, sans que l'on détermine la signification [*meaning*] du nom propre a, c'est-à-dire sans que l'on puisse exhiber l'individu que a désigne directement. Ce qui suppose que l'on puisse assumer l'identité de l'individu en question et lui assurer un statut ontologique déterminé <25>.

Cela exclut explicitement une interprétation *substitutionnelle* qui n'admet que la substitution d'*expressions* et dispense en conséquence de tout engagement sur des objets de référence. Selon cette dernière interprétation, $\exists xFx$ n'imposerait que de trouver un énoncé Fa qui serait vrai. L'engagement, strictement nominaliste, ne vaudrait alors que sur des énoncés et des termes <26>.

Une autre possibilité, plus souple, consiste dans l'esprit de Lesniewski <27>, à construire une grammaire des noms qui autorise aussi bien le recours, outre à des noms singuliers, à des noms pluriels *et même à des noms vides <28>*. Il appert alors que l'engagement ontologique s'avère tributaire ultimement d'une *interprétation sémantique du fonctionnement proprement linguistique des constantes* admises comme valeurs des variables d'individu.

On mesure ici toute l'ambiguïté du qualificatif d'« existentiel » appliqué à l'opération logique de généralisation partielle. Cette quantification s'avère existentielle en ce qu'elle

---

(25) Les *PM* introduisent la notion d'individu comme idée primitive et l'« expliquent » négativement comme « ce qui n'est ni une proposition ni une fonction », cf. *9, p. 132. Quine subordonne l'engagement ontologique à un critère d'individuation : « L'identité ne fait qu'une seule pièce avec l'ontologie », cf. *Relativité de l'ontologie et autres essais*, p. 68. Sur ce dernier point, cf. notre *Introduction à la philosophie de la logique*, § 33, p. 104-107.
(26) Cette interprétation, défendue notamment par Ruth Barcan Marcus, est au cœur des logiques libres. Sur l'opposition entre interprétation objectuelle et substitutionnelle, cf. notre *Introduction à la philosophie de la logique*, § 35, p. 112-118 et « Quantification substitutionnelle, contextes intensionnels et question d'existence ».
27) Sur le nominalisme des calculs protothétique et méréologique de Stanislaw Lesniewski, cf. Denis Miéville, « Stanislaw Lesniewski et l'importance d'une logique développementale » et Peter Simons, « Lesniewski and Ontological Commitment ».
(28) Cf. Pierre Joray, « La quantification catégorielle ».

suppose un *import* existentiel que n'imposent pas les propositions universelles, elle requiert de plus un *engagement* existentiel dès lors que l'on admet la vérité de la proposition en *I*, mais toute la question demeure de savoir sur quoi précisément porte cet engagement. Il s'agit alors de statuer sur l'interprétation des constantes d'individu *a*, *b*, *c*, *etc*. : simples *inscriptions* ou *noms* d'objets dont on admet l'existence. Or, il importe de noter que la décision ne saurait relever de la *logique pure* qui, traitant de la seule validité formelle, n'a pas plus affaire à la vérité des propositions atomiques en jeu qu'aux individus d'un domaine déterminé. Comme le rappelait Russell, la logique pure n'a pas à présupposer l'existence même du monde : « La logique aspire à l'indépendance vis-à-vis du fait empirique, et l'existence de l'univers est un fait empirique. Il est vrai que si le monde n'existait pas, les livres de logique n'existeraient pas ; mais l'existence des livres de logique n'est pas une des prémisses de la logique, elle ne peut non plus être inférée d'aucune proposition qui a le droit de figurer dans un livre de logique » <29>. De la *logique appliquée* relève la détermination du domaine d'application, la vérité des propositions atomiques, le caractère référentiel ou non des constantes d'individu, et le statut ontologique qui est reconnu à ces individus.

Il apert ici clairement que l'existence logique ne saurait être cantonnée à des définitions syntaxiques fixant l'*usage* des symboles et qu'elle requiert des décisions relatives à *l'interprétation sémantique* des mêmes symboles et, *in fine*, au choix du domaine d'application.

5 Fonctions de sélection et de choix

Au terme du parcours syntaxique et sémantique aura-t-on alors expliqué la signification et caractérisé le mode de fonctionnement de la quantification existentielle ? Que nenni. La présentation classique du calcul des prédicats standard ne va pas plus loin. Mais ce n'est le cas ni de l'origine peircienne de la quantification ni de la présentation dialogique de ce même calcul. Les deux ont le mérite de traiter de la

---

(29) *Les Principes des mathématiques*, Intro à la seconde éd., p. 12.

dimension proprement pragmatique de la question en définissant précisément le mode de fonctionnement de la quantification existentielle.

On sait que l'invention de la quantification a été attribuée à Oscar Howard Mitchell, élève de Peirce <30>. Or, Peirce propose une conception originale de la quantification en termes sémiotiques et dialogiques <31>.

D'un point de vue sémiotique, la quantification porte sur le *sujet* de la proposition et met en jeu une procédure *indexicale* de référence directe à un objet dont on peut faire l'expérience <32>. Comme pour Peirce l'essence de l'usage du discours et de toute connaissance est *dialogique*, cette procédure d'indexicalisation doit être conçue comme un jeu dialogique mettant en relation deux interlocuteurs, l'*ego* et le *non ego,* le locuteur et l'auditeur <33>. La quantification devient alors une *fonction de sélection* assumée par chaque joueur à partir d'un univers de discours communément *expérimenté*. Et les rôles dialogiques sont distribués selon que la quantification est universelle ou particulière. La quantification universelle laisse à l'auditeur qui interprète ce que dit le locuteur le choix de sélectionner l'individu qu'il veut. Par contre, la quantification particulière requiert du locuteur qu'il choisisse un individu déterminé : « “Quelque” signifie que le locuteur doit choisir un individu, tandis que “tout” ou “n'importe lequel“ signifie qu'une seconde personne doit effectuer le choix » <34>. Le dialogue est alors antagoniste dans la mesure où le locuteur défend la proposition qu'il avance et l'auditeur qui l'interprète cherche à la contredire.

---

(30) Cf. Peirce, « Sur l'algèbre de la logique ». L'invention de Mitchell et son développement par Peirce date du début des années 1880. Quoique postérieur à celle de Frege, c'est celle-ci qui fut diffusée parmi les logiciens de l'époque.
(31) Sur la lecture dialogique de la quantification peircienne, cf. Jarrett Brock, « Peirce Anticipation of Game Theoretic Logic and Semantics » ; Risto Hilpinen, « On Peirce Theory of the Proposition : Peirce as a Precursor of Game-Theoretical semantics » ; Christiane Chauviré « La quantification chez Peirce ».
(32) « Les sujets sont les index des choses dont on parle », *Collected Papers*, 3.419.
(33) Peirce : « La dualité de l'*ego* et du *non-ego* est le principal constituant de l'idée de vérité », *The Annotated Catalogue of the Papers of C. S. Peirce*, MS 515, p. 24.
(34) *Collected Papers*, 2.523.

Cette intuition peircienne n'a trouvé qu'au début des années 60 une réalisation formelle précise avec la *logique dialogique* de Lorenzen et Lorenz <35>.

Distribuées sur un proposant (*P*) et un opposant (*O*), les preuves logiques de validité relèvent d'un jeu logique et sont garanties par l'existence d'une *stratégie gagnante*. Les règles dialogiques pour la quantification sont alors celles-ci :

– quantification universelle : si l'un des joueurs pose (*x*)*Fx*, l'autre peut attaquer en demandant ce qu'il en est pour une valeur *n* quelconque (?*n*). Le premier joueur doit alors établir la proposition *Fn* *<36>.*

– quantification existentielle : si l'un des joueurs pose ∃*xFx*, l'autre peut attaquer en demandant qu'on lui fournisse un exemple (?). Le premier joueur doit alors établir la proposition *Fn*.

L'intérêt de cette approche dialogique devient alors manifeste : il est de fournir les règles précises d'utilisation de la quantification en termes de *sélection* des valeurs d'individu disponibles.

---

(35) Cf. Paul Lorenzen, « Logik und Agon » et Kuno Lorenz « Basic Objectives of Dialogue Logic in Historical Perspective ». Pour une première approche cf. notre *Introduction à la logique standard*, § 3.3.3 et Gerhard Heinzmann, « La logique dialogique ».

(36) Dans la présentation axiomatique du calcul, la proposition universelle (*x*)*Fx* équivaut à la conjonction : *Fa* ° *Fb* ° *Fc* ° *etc*. Une telle énumération peut poser problème dès lors que le domaine est infini comme en mathématiques. Dans la présentation dialogique, les propositions universelles peuvent être *définies* en termes de stratégie dialogique : « Imaginons deux personnes dont la première asserte (*x*)*F*(*x*). La seconde est alors en droit de choisir à volonté un nombre naturel *n*. Si la première personne peut fournir la preuve qui correspond à *F*(*n*), elle a gagné. Sinon, elle a perdu. L'issue du dialogue est ainsi toujours déterminée et c'est pourquoi on peut considérer les propositions universelles comme dialogiquement définies [*dialog-definit*] », Lorenzen, *Métamathématiques*, p. 21.

Prenons l’exemple simple suivant (où les attaques figurent en gras) :

	O	P
1		$(x)Fx \supset \exists xFx$
2	**(*x*)*Fx***	
3		**?*a*** [2]
4	*Fa*	
5		$\exists xFx$ [1]
6	**?**	
7		*Fa*

En 1, *P* asserte un conditionnel. En 2, *O* pose l’antécédent <37>. En 3, *P* met en doute cet antécédent en demandant s’il vaut pour *a*. *O* réplique en assertant *Fa.* En 5, *P* asserte alors le conséquent de 1 pour défendre le conditionnel initial. En 6, *O* met en doute ce conséquent en demandant un exemple. *P* a alors beau jeu de fournir l’exemple *déjà avancé* par *O* en 4. *P* a donc gagné le jeu dialogique.

Le proposant gagne en exploitant une proposition atomique *Fa* assertée par l’opposant. Il demeure toutefois qu’est seule en jeu la cohérence interne du dialogue car rien ne vient justifier le fait initial que l’opposant puisse s’engager sur cette proposition atomique. On a affaire à un jeu *a priori* et purement formel <38>.

---

(37) La règle du conditionnel est : « Si l’un des joueurs pose $A \supset B$, l’autre attaque en assertant l’antécédent. Si le premier joueur ne peut rejeter cette assertion, il doit alors défendre le conséquent pour gagner ».

(38) Jaakko Hintikka distingue « jeux d’intérieur », jeux de preuve inférentielle, et « jeux d’extérieur », de découverte effective qu’il formalise avec sa sémantique des jeux, cf. *Les Fondements d’une théorie du langage*, p. 151-152 & 160-16 et *The Games of Language*, *Studies in Games-Theoretical Semantics and Its Applications*.

Pour ce qui concerne notre présent propos, l'intérêt de cette logique dialogique est de fixer précisément les règles d'usage des quantificateurs. En particulier, elle permet de rendre compte *pragmatiquement* de la complexité de la *quantification mixte* en calcul des prédicats polyadiques. On sait par exemple qu'en calcul des relations les formules :

$$(1) \qquad \exists x(y)\mathrm{R}(x,y)$$

et

$$(2) \qquad (x)(\exists y)\mathrm{R}(x,y)$$

ne sont pas équivalentes dans la mesure où l'ordre linéaire des quantificateurs détermine leur *dépendance mutuelle* <*39*>.

Le jeu déterminé par (1) se déroulera de la façon suivante :

	O	*P*
1		$\exists x(y)\mathrm{R}(x,y)$
2	**?**	
3		$(y)\mathrm{R}(a,y)$
4	***?b***	
5		$\mathrm{R}(a,b)$

Le proposant ayant fixé en 3 conventionnellement la valeur *a* pour *x*, il peut ensuite accepter la valeur *b* imposée par l'opposant en 4.

---

(39) Cf. notre *Introduction à la logique standard*, § 3.2.2.3. Si on interprète la relation R comme « aimer », (1) signifiera : « Il existe au moins un individu qui aime tout le monde » tel Dieu. Par contre, (2) signifiera : « Tout le monde aime au moins un individu ».

Par contre, le jeu déterminé par (2) se déroulera ainsi :

	O	*P*
1		$(x)(\exists y)R(x,y)$
2	**?*a***	
3		$(\exists y)R(a,y)$
4	**?**	
5		R(*a*,)

En ce cas, l'opposant ayant choisi une valeur *a* pour *x*, le proposant doit choisir la valeur pour *y correspondant au choix précédent*. Dès lors, la sélection devient délicate et le proposant doit disposer d'une *fonction de choix* lui permettant de sélectionner la valeur assignée à *y* en fonction du choix antérieur de *a*. Cette fonction peut d'ailleurs formellement être exprimée par une *fonction de Skolem*<40> $y = f(x)$. Ce qui s'écrit alors :

$$(x)\ R[x,f(x)]$$

Dans certains cas cette fonction est aisément déterminable. Par exemple, si dans une société polygame, on admet que « Tout homme marié possède une femme », ce jugement se traduit par :

$$(x)(\exists y)\{[(Hx \circ M(x)] \rightarrow P(x,y)\}$$

et requiert la fonction de choix f suivante :

$$(x)\{[(Hx \circ M(x)] \rightarrow P[x,f(x)]\}$$

(40) La skolémisation conserve la satisfiabilité de la formule initiale (mais son langage se trouve étendu au second ordre), cf. Thoralf Skolem, « Sur la logique mathématique », p. 99-100.

La stratégie de jeu est alors déterminée par l'existence d'une fonction de choix dont on comprend aisément qu'elle est le fait d'« être épouse de » :

$$(\exists f)(x)\{[(Hx \circ M(x)] \rightarrow P[x,f(x)]\}$$

Le jeu dialogique peut alors se terminer ainsi :

5'		R(*a,f(x)*)
6	**?**<41>	
7		R(*a,b*).

Le proposant a pu choisir *b* dans la mesure où il sait qu'elle est une des épouses de *a*.

Malheureusement, il est des cas où la fonction de choix n'est pas accessible, notamment lorsque le choix se fait entre des éléments d'ensembles infinis. C'est par exemple le cas lorsqu'il s'agit de définir le produit cartésien de deux classes en prenant à chaque fois un seul élément de chaque classe. L'appariement est toujours possible lorsque chaque classe est finie. Mais la question du choix se pose de façon cruciale lorsque les classes en jeu sont infinies. On ne dispose plus alors d'un principe de choix permettant de contrôler les appariements. Il faut donc *postuler* une fonction de choix sans pouvoir l'engendrer. Ce qu'exprime Russell avec son humour habituel ainsi : « Je donnerai un exemple : il était une fois un milliardaire qui acheta un nombre infini de paires de souliers et, chaque fois qu'il achetait une paire de souliers, il achetait aussi une paire de chaussettes. Nous pouvons faire une sélection en choisissant l'un des deux souliers parce que nous pouvons choisir soit toujours le soulier droit, soit toujours le soulier gauche. Ainsi, pour ce qui est des souliers les sélections existent. Mais, en ce qui concerne les chaussettes, où l'on ne peut distinguer la droite de la gauche, nous ne pouvons utiliser cette règle de sélection ».<42>

---

(41) Nous introduisons ici la règle selon laquelle l'introduction d'une fonction de Skolem conduit à une attaque consistant à demander d'*utiliser effectivement* cette fonction pour choisir une valeur d'individu déterminée.
(42) *Histoire de mes idées philosophiques*, chap. 8, p. 116.

Ce que Russell appelle « axiome multiplicatif » postule dans le cas de l'infini l'existence d'un tel choix *sans en fournir les modalités.* Il peut s'exprimer ainsi : « Étant donné une collection de classes disjointes deux à deux, dont aucune n'est vide, il existe au moins une classe ayant exactement un élément en commun avec chacune des classes de la collection ».<43>

On est loin de la définition syntaxique de la quantification existentielle et on mesure ici la complexité de cette opération fondamentale du calcul des prédicats.<44>

CONCLUSION

Contrairement à la présentation standard classique, l'opération de quantification existentielle ne saurait recevoir une définition complète dans les seuls termes d'une analyse syntaxique et sémantique. Comme l'atteste l'intuition inaugurale de Peirce et les développements ultérieurs, la signification et le fonctionnement de la quantification requièrent absolument une approche pragmatique, précisément dialogique, en termes de règle de défense et d'attaque et de stratégie gagnante.

Mais si cela précise de façon satisfaisante l'usage technique de l'opération de quantification, cela ne résout cependant pas toutes les questions philosophiques posées par la dimension « existentielle » de la généralisation partielle. On a vu par exemple que la question se posait de savoir si l'on adoptait une interprétation objectuelle, substitutionnelle ou catégorielle de cette quantification.

---

(43) *Introduction à la philosophie mathématique*, chap. 12, p. 241. En 1929, Skolem utilisa ses fonctions et l'axiome de choix pour démontrer de façon intuitionniste puis classique le théorème de Löwenheim, cf. « Sur quelques questions relatives aux fondements des mathématiques », § 4, p. 161-164.

(44) On pourra accroître encore cette complexité en considérant la logique faite pour l'indépendance d'Hintikka qui permet d'assurer l'*indépendance mutuelle* des quantificateurs, cf. « Informational Independence as a Semantical Phenomenon » et Manuel Rebuschi, « Quantification et indépendance informationnelle ».

Le choix en la matière, qui relève de l'*application* de la logique, ouvre *in fine* une interrogation proprement *praxéologique* sur le mode d'établissement de la valeur de vérité des propositions atomiques impliquées, sur le rôle référentiel des variables d'individu comme sur le statut ontologique assigné aux individus éventuellement admis.<45>

Nous laisserons ici ouverte cette question ultime, nous contentant d'avoir montré que la quantification existentielle constituait un aspect crucial du calcul standard des prédicats.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROCK Jarrett. « Peirce Anticipation of Game Theoretic Logic and Semantics », *Semiotica*, Michael E. *et alii* eds. New-York, Plenum, 1981.

CHATTI Saloua, *Le Problème de la référence chez Quine*, Université de Tunis, 2008.

CHAUVIRÉ Christiane, « La quantification chez Peirce », *La Quantification dans la logique moderne*, Pierre Joray éd. L'Harmattan, Paris, 2005, p. 73-96.

FREGE Gottlob :

– *Les Fondements de l'arithmétique,* (1884), trad. fr. Cl. Imbert, Paris, Seuil, 1969.

– « Fonction et concept » (1891), trad. fr. Cl. Imbert, *Écrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil, 1971, p.80-101.

GOCHET Paul:

– *Ascent to Truth*, *A Critical Examination of Quine*, Philosophia Verlag, München, 1986.

---

(45) Pour Peirce on est là au niveau de l'*expérience*. Pour une approche dialogique de la question de la vérité qui fait place à cette dimension praxéologique, cf. notre article « The Dialogical Logic of Veridicity ».

_ « L'être selon Quine », *Lire Quine, logique & ontologie*, J.-M. Monnoyer éd., Éd de l'Éclat, Paris, 2006, p. 185-209.

HEINZMANN Gerhard, « La logique dialogique », *Du dialogue*, D. Vernant éd., *Recherches sur la philosophie et le langage*, n°14, Vrin, Paris, 1992, p. 249-261.

HILPINEN Risto, « On Peirce Theory of the Proposition : Peirce as a Precursor of Game-Theoretical semantics », *The Monist*, n°65, 1982.

HINTIKKA Jaakko :

– *Les Fondements d'une théorie du langage*, trad. fr. N. Lavand, Paris, PUF, 1994.

– *The Games of Language*, *Studies in Games-Theoretical Semantics and Its Applications*, D. Reidel Pub. Comp., Dordrecht, 1985.

JORAY Pierre, « La quantification catégorielle ». *La Quantificaton dans la logique moderne*, Pierre Joray éd. L'Harmattan, Paris, 2005, p. 233-260.

LORENZ Kuno « Basic Objectives of Dialogue Logic in Historical Perspective », *Synthese*, n°127, 2001, p. 255-263.

LORENZEN Paul :

– « Logik und Agon » (texte d'une conférence donnée à Venise en 1958), rééd. in *Dialogische Logik*, Lorenzen P. und Lorenz K., Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978.

– *Métamathématiques*, Intro. et trad. fr. J.-B. Grize, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

MIEVILLE Denis, « Stanislaw Lesniewski et l'importance d'une logique développementale », *Stanislaw Lesniewski aujourd'hui*, D. Miéville & D. Vernant éds. Recherches sur la philosophie et le langage & Centre de recherches sémiologiques, n°16, Vrin, Paris, 1995, p. 67-92.

PEIRCE Charles Sanders :

– *Collected Papers*. Harvard University Press, Cambridge, 1931-1935.

– *The Annotated Catalogue of the Papers of C.S. Peirce* (MS), R. Robin, Amherst, Univ. of Massachussetts Press, 1967.

– « Sur l'algèbre de la logique », (1885), (extraits) trad. fr. Pierre Joray, *La Quantificaton dans la logique moderne*, Pierre Joray éd. L'Harmattan, Paris, 2005, p. 3-16.

QUINE Willard van Orman :

– *Relativité de l'ontologie et autres essais*, (1969), trad. fr. J. Largeault, Aubier-Montaigne, Paris, 1977.

REBUSCHI Manuel, « Quantification et indépendance informationnelle », *La Quantification dans la logique moderne*, Pierre Joray éd., L'Harmattan, Paris, 2005, p. 155-178.

RUSSELL Bertrand :

– Les *Principes des Mathématiques*, (1903), trad. fr. partielle des § 1-106 et des App. A & B par J.-M. Roy, *Écrits de logique philosophique*, PUF, Paris, 1989.

– « The Existential Import of Propositions », (1905), rééd. *Essays in Analysis*, D. Lackey ed., Allen & Unwin, London, 1973, chap. 4, 98-102.

– « De la dénotation », (1905), trad. fr. par J.-M. Roy, *Écrits de logique philosophique*, PUF, Paris, 1989.

– « The Theory of Implication », *American Journal of Mathematics*, XXVIII, 1906, 159-202.

– « la Philosophie de l'atomisme Logique », (1918), trad. fr. J.-M. Roy, *Écrits de logique philosophique*, PUF, Paris, 1989.

– *Introduction à la philosophie mathématique*, (1919), trad. fr. F. Rivenc, Payot, Paris, 1991.

– *Histoire de mes idées philosophiques*, (1959), trad. fr. G. Auclair Gallimard, Paris, 1961.

RUSSELL Bertrand & WHITEHEAD Alfred North :

Principia Mathematica :

– Première édition, London, Cambridge U.P., vol. I, 1910, II, 1912, III, 1913, trad. fr. des introductions par J.-M. Roy *Écrits de logique philosophique*, PUF, Paris, 1989.

– *Paperback edition to *56*, (avec l'intro. à la seconde éd. et les Appendices A et C), Cambridge U.P., London, 1973.

SIMONS Peter, « Lesniewski and Ontological Commitment ». *Stanislaw Lesniewski aujourd'hui*, D. Miéville & D. Vernant éds. Recherches sur la philosophie et le langage & Centre de recherches sémiologiques, Vrin, Paris, 1995, p. 103-119.

SKOLEM Thoralf :

– « Sur la logique mathématique », (1928), trad. fr. J. Largeault, *Logique mathématique*, *textes*, A. Colin, Paris, 1972, p. 91-108.

– « Sur quelques questions relatives aux fondements des mathématiques », (1929), trad. fr. J. Largeault, *Logique mathématique*, *textes*, A. Colin, Paris, 1972, p. 139-172.

VERNANT Denis :

– « Le traitement logique de l'existence et les présupposés de l'ontologie », *Dialectica*, vol. 37, n°2, 1983, p. 111-132.

– *Introduction à la philosophie de la logique*, Mardaga, Bruxelles, 1986.

– « Quantification substitutionnelle, contextes intensionnels et question d'existence », *Dialectica*, vol. 40, n°3, 1986, p. 273-296.

— *La Philosophie mathématique de Russell*, Vrin, Paris, 1993.

– « Interprétation du formalisme logique : la lecture des *Principia Mathematica* par F.P. Ramsey », *Le Formalisme en question*, F. Nef & D. Vernant éds., Vrin, Paris, 1998, p. 146-168.

– *Introduction à la logique standard*, ChampsFlammarion, Paris, 2001.

– « Quine & Russell, aspects sémantiques, ontologiques et logiques », *Lire Quine, logique & ontologie*, J.-M. Monnoyer éd., Éd de l'Éclat, Paris, 2006, p. 90-158.

– « The Dialogical Logic of Veridicity », *Logical Properties of Dialogue*, A. Trognon, M. Batt, J. Caelen, D. Vernant eds., Presses Universitaires de Nancy, Coll. Langage, Cognition, Interaction, 2011, p. 123-145.